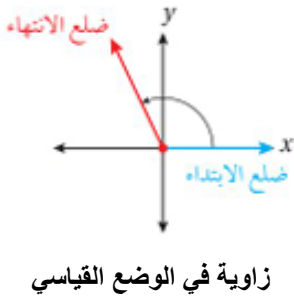
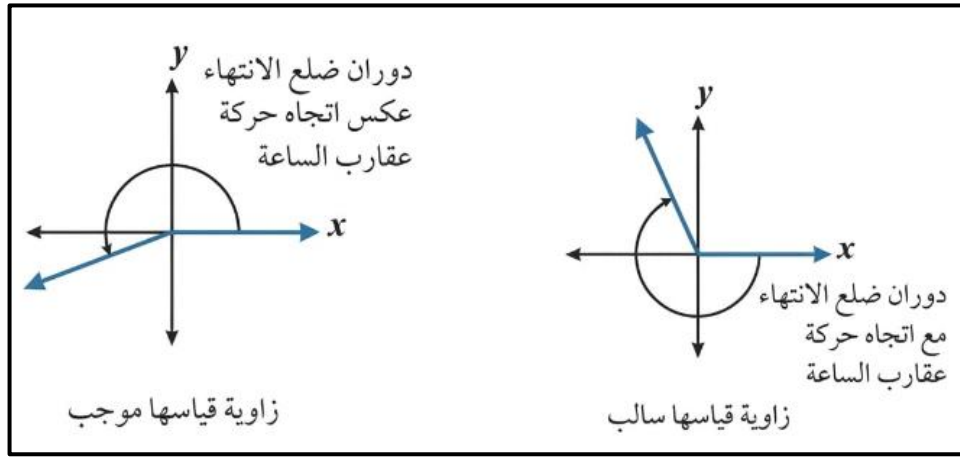


مقدمة

تعلمنا سابقا أن الزاوية المرسومة في الوضع القياسي في المستوى الاحداثي هي زاوية يقع رأسها عند نقطة الأصل $(0, 0)$ و ضلع ابتدائها منطبق على محور x الموجب .

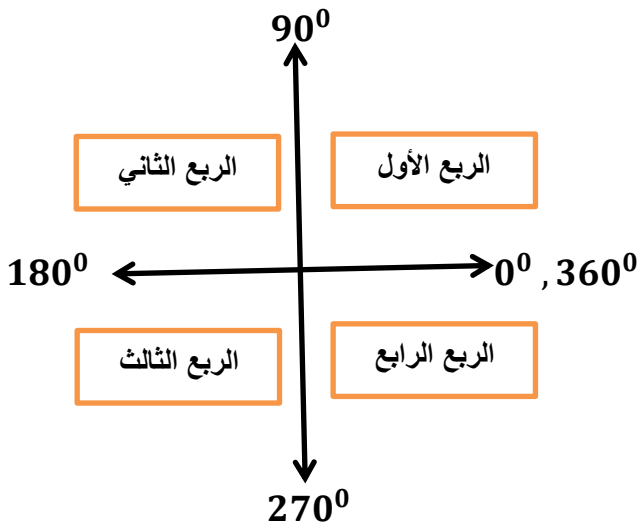


وتعلمنا أيضا أن قياس الزاوية يكون موجبا اذا كان دوران ضلع الانتهاء عكس اتجاه حركة عقارب الساعة , وسالبا اذا كان دوران ضلع الانتهاء مع اتجاه حركة عقارب الساعة .



أولا :- رسم الزاوية في الوضع القياسي

تذكير :



الربع الاول :- $0^\circ < \theta < 90^\circ$

الربع الثاني :- $90^\circ < \theta < 180^\circ$

الربع الثالث :- $180^\circ < \theta < 270^\circ$

الربع الرابع :- $270^\circ < \theta < 360^\circ$

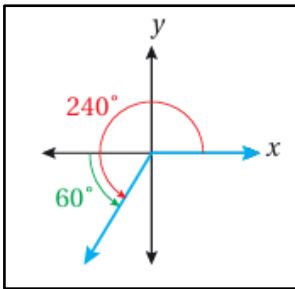
الزوايا الربعية : هي الزوايا التي تكون منطبقة على المحاور وهي $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

المنقلة :- تستعمل لرسم الزاوية رسما دقيقا , حيث يبدأ الدوران من محور x .

مثال (1)

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :-

1) 240°



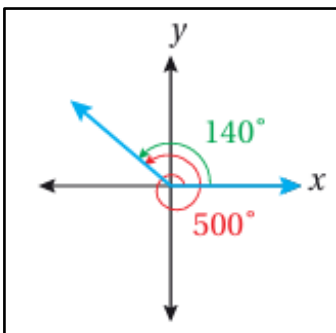
الحل :-

الزاوية موجب وتقع في الربع الثالث

وعليه ضلع الانتهاء يقع في الربع الثالث

بحيث يكون أقرب الى 270° والدوران عكس عقارب الساعة

2) 500°



الحل :-

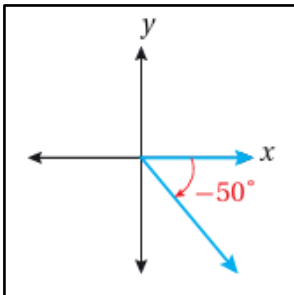
الدورة كاملة 360° , لكن 500° أكبر من 360°

في هذه الحالة نطرح منها 360° لمعرفة أين يقع ضلع الانتهاء .

$500^\circ - 360^\circ = 140^\circ$ وهذه تقع في الربع الثاني وأقرب الى 180°

ملاحظة :- نكمل دورة كاملة ثم نرسم 140°

3) -50°

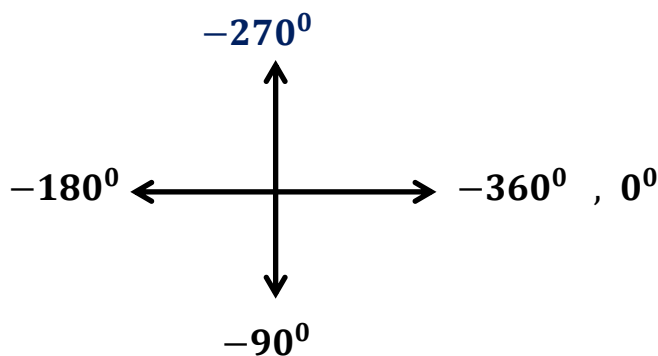


الحل :-

هنا الدوران مع عقارب الساعة لانه الزاوية سالبة

بدءاً بالجزء الموجب من محور x

لاحظ تدرج المستوى في حالة السالب

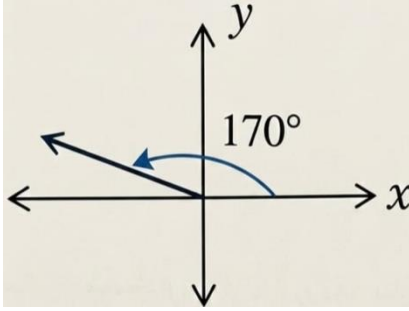


ملاحظة :- لمعرفة ضلع انتهاء زاوية سالبة , اجمع لها 360° أو مضاعفاتها .

أتحقق من فهمي

أرسم في الوضع القياسي الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :-

a) 170°



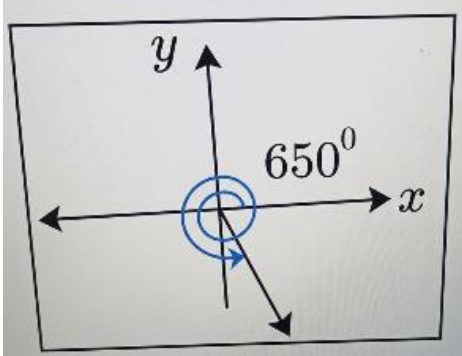
الحل :-

الزاوية موجب وتقع في الربع الثاني

وعليه ضلع الانتهاء يقع في الربع الثاني

بحيث يكون أقرب إلى 180° والدوران عكس عقارب الساعة

b) 650°



الحل :-

الدورة كاملة 360° , لكن 650° أكبر من 360°

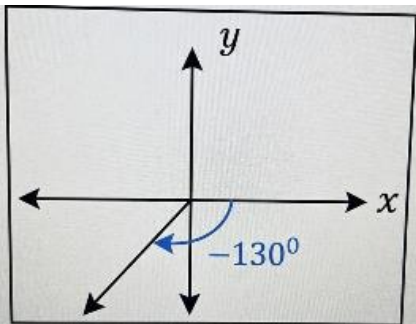
في هذه الحالة نطرح منها 360° لمعرفة أين يقع ضلع الانتهاء .

$650^\circ - 360^\circ = 290^\circ$ وهذه تقع في الربع الرابع وأقرب

إلى 270°

ملاحظة :- نكمل دورة كاملة ثم نرسم 290°

c) -130°



الحل :-

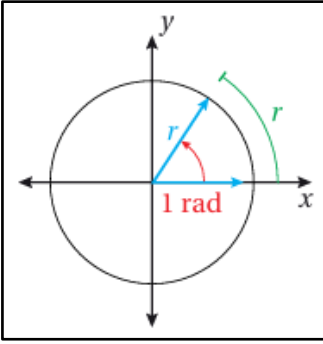
هنا الدوران مع عقارب الساعة لأنه الزاوية سالبة

بدءاً بالجزء الموجب من محور x

تدريب اضافي

ارسم الزاوية 400° - في الوضع القياسي .

ثانياً :- الراديان



تعلمنا سابقاً أنه يمكن قياس الزوايا بالدرجات ($230^0, 190^0, 178^0, -$) ويمكن أيضاً قياسها بوحدة تعتمد على طول قوس الدائرة وتسمى الراديان (rad) توجد علاقة للتحويل من قياس بالدرجات الى الراديان والعكس .

التحويل من القياس بالدرجات الى القياس بالراديان والعكس

مفهوم أساسي

(1) لتحويل قياس زاوية من الدرجات الى الراديان أضرب في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^0}$

(2) لتحويل قياس زاوية من الراديان الى الدرجات أضرب في $\frac{180^0}{\pi \text{ rad}}$

ملاحظة :-

(1) مثلاً يكتب 2 راديان في صورة 2 rad

(2) بوجه عام تحذف كلمة rad عند التعبير عن قياسات الزوايا بالراديان وحين يكون قياس الزاوية من دون وحدة فهذا يعني أن قياسها بوحدة راديان

مثال (2)

أحول قياس الزاوية المكتوب بالدرجات الى الراديان , وقياس الزاوية المكتوب بالراديان الى الدرجات في كل مما يأتي :-

1) 140^0

الحل :- هنا نحول من الدرجات الى الراديان , أضرب في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^0}$ ثم اختصر

$$140^0 = (140^0) \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^0} \right) = \frac{7\pi}{9} \text{ rad}$$

2) $\frac{-\pi}{12}$

الحل :- هنا نحول من الراديان الى الدرجات , أضرب في $\frac{180^0}{\pi \text{ rad}}$ ثم اختصر

$$\frac{-\pi}{12} = \left(\frac{-\pi}{12} \text{ rad} \right) \times \left(\frac{180^0}{\pi \text{ rad}} \right) = -15^0$$

أتحقق من فهمي

أحول قياس الزاوية المكتوب بالدرجات الى الراديان , وقياس الزاوية المكتوب بالراديان الى الدرجات في كل مما يأتي :-

a) 165^0

الحل :- هنا نحول من الدرجات الى الراديان , أضرب في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^0}$ ثم اختصر

$$165^0 = (165^0) \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^0} \right) = \frac{11\pi}{12} \text{ rad}$$

b) $\frac{5\pi}{4}$

الحل :- هنا نحول من الراديان الى الدرجات , أضرب في $\frac{180^0}{\pi \text{ rad}}$ ثم اختصر

$$\frac{5\pi}{4} = \left(\frac{5\pi}{4} \text{ rad} \right) \times \left(\frac{180^0}{\pi \text{ rad}} \right) = 225^0$$

c) -80^0

الحل :- هنا نحول من الدرجات الى الراديان , أضرب في $\frac{\pi \text{ rad}}{180^0}$ ثم اختصر

$$-80^0 = (-80^0) \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^0} \right) = -\frac{4\pi}{9} \text{ rad}$$

d) -6

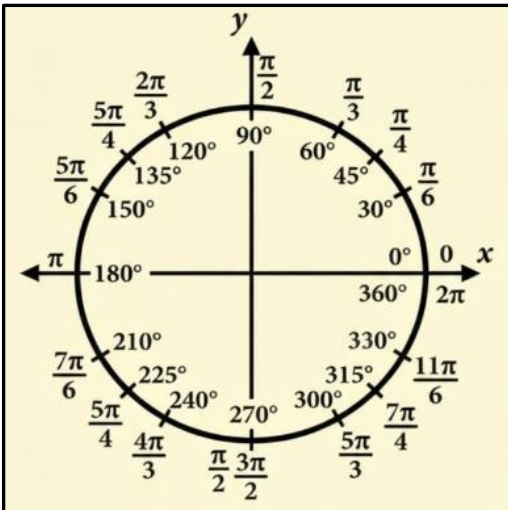
الحل :- هنا نحول من الراديان الى الدرجات , أضرب في $\frac{180^0}{\pi \text{ rad}}$ ثم اختصر

$$-6 = (-6 \text{ rad}) \times \left(\frac{180^0}{\pi \text{ rad}} \right) = \frac{-1080^0}{\pi} \approx 343.8^0$$

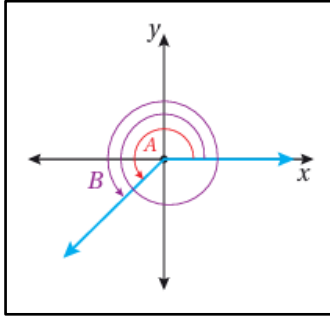
ملاحظة :-

من المفيد حفظ القياسات المتكافئة بالدرجات والراديان

للزوايا الخاصة في الربع الأول



ثالثا :- الزوايا المشتركة



يطلق على الزوايا في الوضع القياسي التي لها ضلع الانتهاء نفسه

لكن قياساتها مختلفة **اسم الزوايا المشتركة** فمثلا الزاويتان A و B

في الشكل المجاور هما زاويتان مشتركتان .

مفهوم أساسي

الزوايا المشتركة

يمكن ايجاد زاوية مشتركة في ضلع الانتهاء مع زاوية أخرى عن طريق جمع أو طرح أحد مضاعفات الزاوية 360^0 أو 2π

بالدرجات :- اذا كانت θ تمثل القياس بالدرجات لزاوية ما , فان جميع الزوايا ذات القياس

$\theta + 360^0 n$ هي زوايا مشتركة مع θ , حيث n عدد صحيح .

بالراديان :- اذا كانت θ تمثل القياس بالراديان لزاوية ما , فان جميع الزوايا ذات القياس

$\theta + 2n\pi$ هي زوايا مشتركة مع θ حيث n عدد صحيح .

بالمختصر : نقوم بتغيير قيمة n في كل مرة $1, 2, 3, \dots$ وايضا بالسالب للحصول على زوايا سالبة

ملاحظة :- للحصول على زوايا مشتركة موجب أو سالب نستعين بالعلاقة $\theta \pm 360^0 n$, $\theta \pm 2n\pi$

ودائما اذا كان الفرق بين أي زاويتين من مضاعفات 360^0 أو 2π تكونان مشتركتين .

مثال (3)

أجد زاويتين احدهما قياسهما موجب والاخرى قياسها سالب , وكلتاهما مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاه مما يأتي , ثم أرسمهما :-

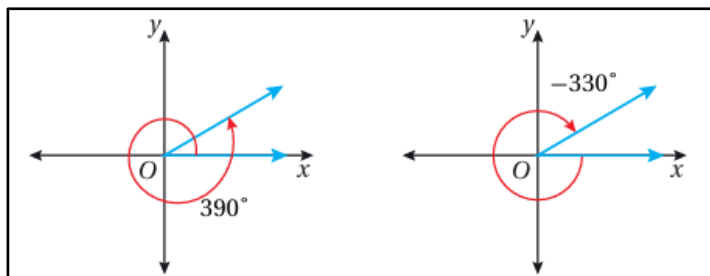
1) 30^0

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^0 n$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$: $30^0 + 360^0 (1) = 390^0$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$: $30^0 + 360^0 (-1) = -330^0$

نرسم الزاويتان :-

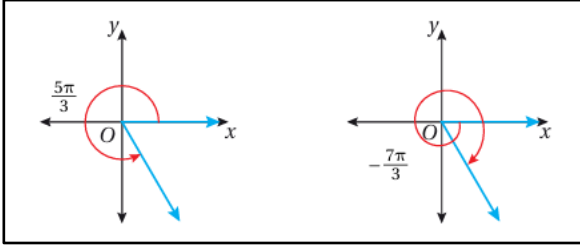


2) $\frac{-\pi}{3}$

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$:- $\frac{-\pi}{3} + 2(1)(\pi) = \frac{5\pi}{3}$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$:- $\frac{-\pi}{3} + 2(-1)(\pi) = \frac{-7\pi}{3}$



أتحقق من فهمي

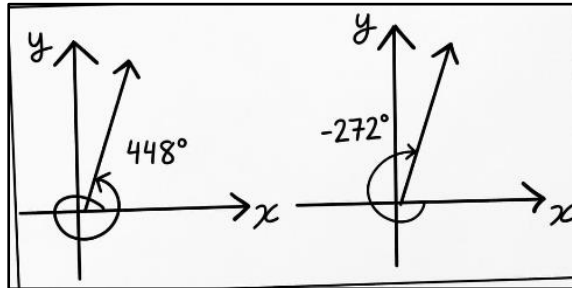
أجد زاويتين احدهما قياسهما **موجب** والأخرى قياسها **سالِب** , وكلتاهما مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاه مما يأتي , ثم أرسمهما :-

a) 88°

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^\circ n$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$: $88^\circ + 360^\circ (1) = 448^\circ$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$: $88^\circ + 360^\circ (-1) = -272^\circ$



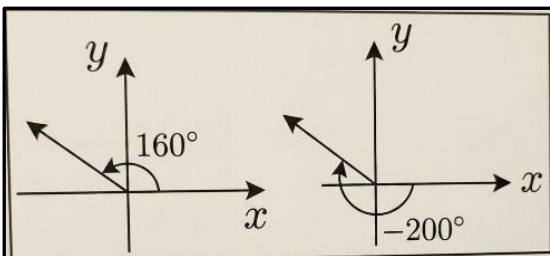
b) -920°

الحل :-

لاحظ هنا الزاوية تكمل أكثر من دورة , للحصول على موجب عند تعويض $n = 2$, $n = 1$ تبقى سالِب , لكن عند التعويض $n = 3$ نحصل على موجب , أما الحصول على سالِب نعوض موجب أو سالِب أي قيمة لـ n تعطي سالِب

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 3$: $-920^\circ + 360^\circ (3) = 160^\circ$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = 2$: $-920^\circ + 360^\circ (2) = -200^\circ$

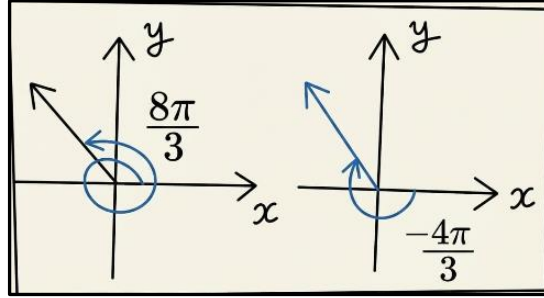


c) $\frac{2\pi}{3}$

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$:- $\frac{2\pi}{3} + 2(1)(\pi) = \frac{8\pi}{3}$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$:- $\frac{2\pi}{3} + 2(-1)(\pi) = -\frac{4\pi}{3}$

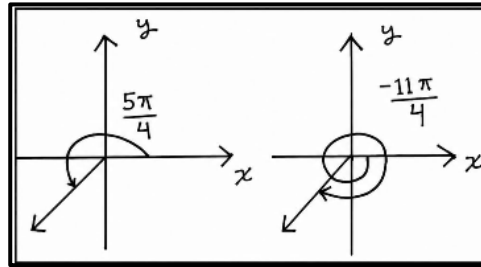


d) $\frac{-3\pi}{4}$

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$:- $\frac{-3\pi}{4} + 2(1)(\pi) = \frac{5\pi}{4}$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$:- $\frac{-3\pi}{4} + 2(-1)(\pi) = -\frac{11\pi}{4}$



تطبيقات

أولا :- طول القوس ومساحة القطاع

تذكير :-

القوس :- جزء من الدائرة محدد بنقطتين عليها

القطاع :- القطاع هو الجزء المحصور بين قوس ونصفي قطرين يمران بطرفي القوس

الزاوية المركزية : هي الزاوية التي يقع رأسها على مركز الدائرة وضلعها نصفا قطرين في الدائرة .

في هذا الدرس سنتعلم ايجاد طول القوس ومساحة القطاع .

طول القوس ومساحة القطاع

مفهوم أساسي

طول القوس

بالكلمات : طول القوس s من الدائرة المقابل لزاوية مركزية

قياسها θ بالراديان يساوي ناتج ضرب طول نصف القطر r في θ

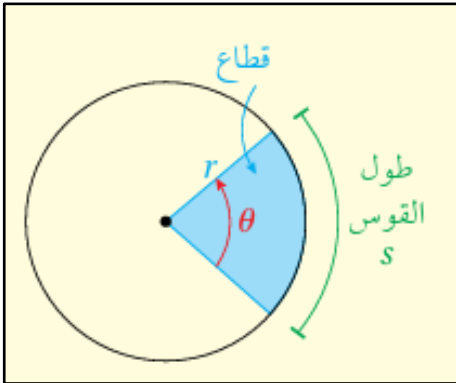
بالرموز : $s = r \theta$

مساحة القطاع

بالكلمات : مساحة القطاع A الذي قياس زاويته المركزية θ بالراديان في دائرة طول نصف قطرها r

تساوي نصف ناتج ضرب مربع طول نصف القطر r في θ

بالرموز : $A = \frac{1}{2} r^2 \theta$

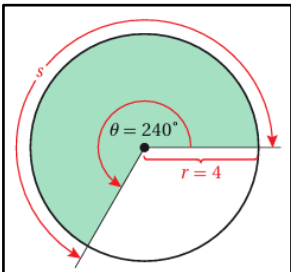


ملاحظة :- قبل تطبيق القوانين تأكد أن الزاوية بالراديان , حيث ان كانت بالدرجات نقوم بتحويلها للراديان.

مثال (4)

يبين الشكل المجاور قطاعا دائريا زاويته المركزية 240° في دائرة طول نصف قطرها 4 cm

أجد طول القوس ومساحة القطاع , وأقرب اجابتي الى أقرب جزء من عشرة .



الحل :- نحول قياس الزاوية المركزية من الدرجات الى الراديان .

$$240^\circ = 240^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{4\pi}{3}$$

لايجاد طول القوس نكتب القانون ونعوض

$$s = r \theta$$

$$s = (4) \left(\frac{4\pi}{3} \right) \approx 16.8 \text{ cm}$$

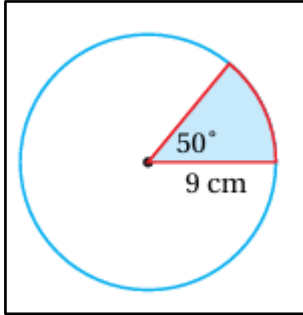
لايجاد مساحة القطاع نكتب القانون ونعوض

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (4)^2 \left(\frac{4\pi}{3} \right) \approx 33.5 \text{ cm}^2$$

أتحقق من فهمي

يبين الشكل المجاور **قطاعا دائريا** زاويته المركزية 50° في دائرة طول نصف قطرها 9 cm .
أجد **طول القوس** و**مساحة القطاع** , وأقرب اجابتي الى أقرب جزء من عشرة .



الحل :- نحول قياس الزاوية المركزية من الدرجات الى الراديان .

$$50^\circ = 50^\circ \left(\frac{\pi}{180^\circ} \right) = \frac{5\pi}{18}$$

لايجاد **طول القوس** نكتب القانون ونعوض

$$S = r \theta$$

$$S = (9) \left(\frac{5\pi}{18} \right) \approx 7.9\text{ cm}$$

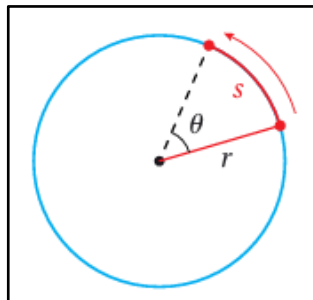
لايجاد **مساحة القطاع** نكتب القانون ونعوض

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (9)^2 \left(\frac{5\pi}{18} \right) \approx 35.3\text{ cm}^2$$

ثانيا :- الحركة الدائرية

اذا افترضت أن نقطة تتحرك على محيط دائرة (كما في الشكل المجاور) , فانه يمكنني وصف حركتها باستعمال **السرعة الخطية** التي تمثل المعدل الذي تتغير فيه المسافة المقطوعة . فالسرعة الخطية هي المسافة المقطوعة مقسومة على المدة الزمنية المنقضية .



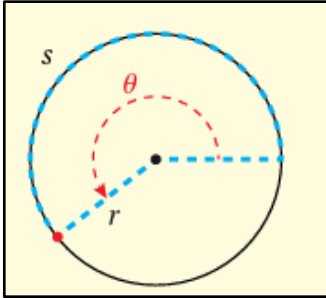
ويمكن أيضا وصف حركة النقطة باستعمال **السرعة الزاوية** التي تمثل المعدل الذي يتغير فيه قياس الزاوية المركزية . فالسرعة الزاوية هي قيمة التغير في قياس الزاوية بالراديان مقسومة على الزمن المنقضي.

بافتراض أن نقطة تتحرك بسرعة ثابتة على محيط دائرة , طول نصف قطرها r :-

(1) إذا كان s طول القوس الذي تقطعه النقطة في مدة زمنية مقدارها t , فإن **السرعة الخطية v**

لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية :-

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t}$$

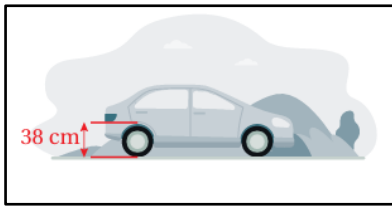


(2) إذا كانت θ هي زاوية الدوران (بالراديان) التي دارتها النقطة في مدة زمنية مقدارها t

فإن السرعة الزاوية ω لهذه النقطة تعطى بالعلاقة الآتية :

$$\omega = \frac{\theta}{t}$$

مثال (5) من الحياة



اطار سيارة يبلغ طول قطره 38 cm ويدور 9.3 دورات في الثانية :

(1) أجد **السرعة الخطية** للاطار بالسنتيمتر لكل ثانية

الحل :-

ملاحظة : في حالة اعطاء عددا معيناً من الدورات , هنا لمعرفة زاوية الدوران θ التي تقابل عدداً من الدورات

نقوم بضرب عدد الدورات في 2π , وعليه $\theta = (9.3)(2\pi) = 18.6\pi$

نكتب قانون السرعة الخطية ونعوض بحيث $s = r\theta$, $r = 19 \text{ cm}$

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = \frac{(19)(18.6\pi) \text{ cm}}{1 \text{ s}} = 353.4\pi \text{ cm/s}$$

(2) أجد **السرعة الزاوية** للاطار بالراديان لكل ثانية

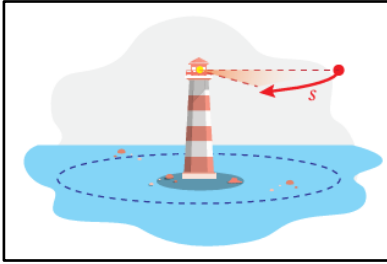
الحل :- نكتب قانون السرعة الزاوية ونعوض

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{18.6\pi \text{ rad}}{1 \text{ s}} = 18.6\pi \text{ rad/s}$$

أو تقريباً 58.4 rad/s

أتحقق من فهمي

تتوسط منارة قناة ماء , ويتحرك ضوءها حركة دائرية بسرعة ثابتة . اذا أكمل ضوء المنارة دورة كاملة كل 10 ثوان , فأجد السرعة الزاوية



لضوئها في الدقيقة .

الحل :-

هنا عدد الدورات (1) , وعليه $\theta = (1)(2\pi) = 2\pi$

لكن هنا في اختلاف في وحدات الزمن , حيث معطى بالثانية والمطلوب بالدقيقة , وكما نعلم أنه عند التحويل من

ثانية الى دقيقة نقسم على 60 , وعليه $t = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$

نكتب قانون السرعة الزاوية ونعوض

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{\frac{1}{6}} = 12\pi \text{ rad/min}$$

$$\approx 37.7 \text{ rad/min}$$

ملخص سريع

(1) نستطيع الربط بين قانون السرعة الزاوية والخطية كما يلي :-

$$v = \frac{s}{t} = \frac{r\theta}{t} = r \times \frac{\theta}{t} = r\omega$$

$$v = r\omega \text{ : وعليه}$$

(2) نستطيع الربط بين قانون مساحة القطاع وطول القوس كما يلي :

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} r \times r\theta$$

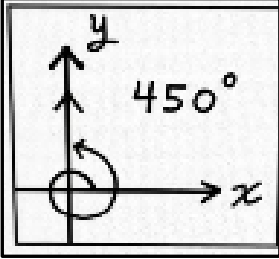
$$A = \frac{1}{2} rs$$

(3) محيط القطاع الدائري :- $c = s + 2r$

أُتدرب وأُحل المسائل

أرسم في **الوضع القياسي** الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :-

1) 450°



الحل :-

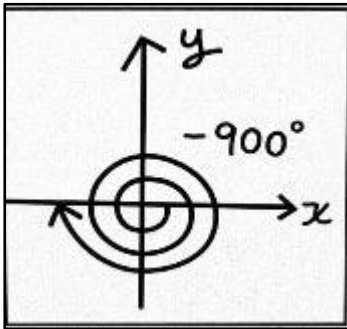
الدورة كاملة 360° , لكن 450° أكبر من 360°

في هذه الحالة نطرح منها 360° لمعرفة أين يقع ضلع الانتهاء .

$450^\circ - 360^\circ = 90^\circ$ وهذه ضلع انتهائها ينطبق على محور y الموجب

ملاحظة :- نكمل دورة كاملة ثم نرسم 90°

2) -900°



الحل :-

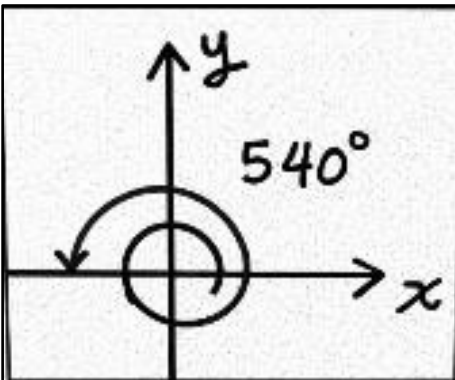
هنا الدوران مع عقارب الساعة لانه الزاوية سالبة , لمعرفة ضلع انتهائها نجمع لها مضاعفات 360°

$$-900^\circ = -900^\circ + (2)(360^\circ) = -180^\circ$$

وهذه ضلع انتهائها ينطبق على محور x السالب

ملاحظة :- نكمل دورتان كاملتان ثم نرسم -180°

3) 540°



الحل :-

الدورة كاملة 360° , لكن 540° أكبر من 360°

في هذه الحالة نطرح منها 360° لمعرفة أين يقع ضلع الانتهاء .

$$540^\circ - 360^\circ = 180^\circ$$

على محور x السالب

ملاحظة :- نكمل دورة كاملة ثم نرسم 180°

4) -700°

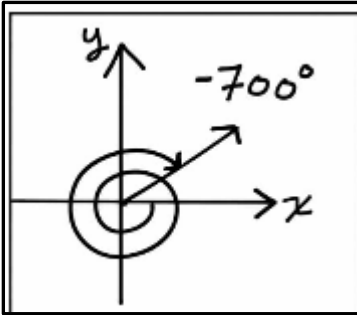
الحل :-

هنا الدوران مع عقارب الساعة لانه الزاوية سالبة , لمعرفة ضلع انتهائها نجمع لها مضاعفات 360°

$$-700^\circ = -700^\circ + (360^\circ) = -340^\circ$$

وهذه ضلع انتهائها في الربع الأول .

ملاحظة :- نكمل دورة كاملة ثم نرسم -340°



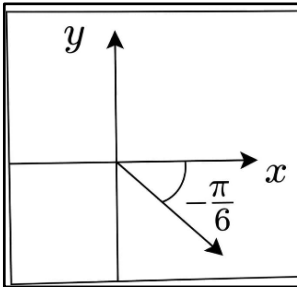
5) $-\frac{\pi}{6}$

الحل :-

ملاحظة :- لسهولة الرسم عند اعطاء قياس بالراديان حول للدرجات

$$-\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = -30^\circ$$

هنا نتحرك مع عقارب الساعة .



6) $\frac{21\pi}{4}$

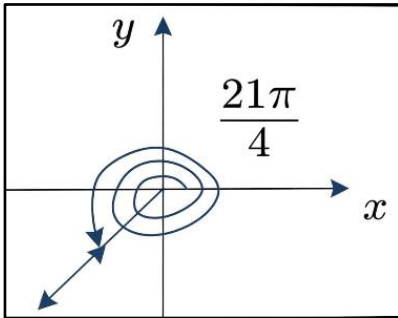
الحل :-

$$\frac{21\pi}{4} = \frac{21\pi}{4} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 945^\circ$$

في هذه الحالة نطرح منها دورتان لمعرفة أين يقع ضلع الانتهاء .

$$945^\circ - (2)360^\circ = 225^\circ$$

ملاحظة :- نكمل دورتان كاملتان ثم نرسم 225°

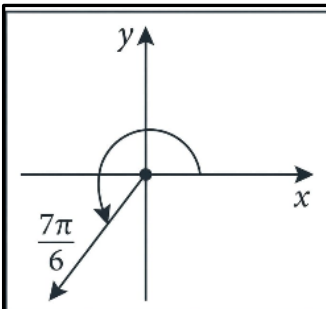


7) $\frac{7\pi}{6}$

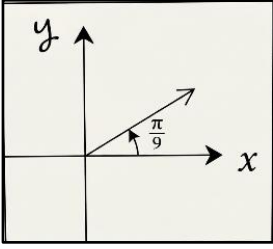
الحل :-

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 210^\circ$$

في الربع الثالث .



8) $\frac{\pi}{9}$



الحل :-

$$\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} \times \frac{180^0}{\pi} = 20^0 \quad (\text{الربع الأول})$$

أحول قياس الزاوية المكتوب بالدرجات الى الراديان , وقياس الزاوية المكتوب بالراديان الى الدرجات في كل مما يأتي :-

9) -225^0

الحل :-

$$-225^0 = (-225^0) \times \left(\frac{\pi}{180^0} \right) = \frac{-5\pi}{4} \text{ rad}$$

10) -135^0

الحل :-

$$-135^0 = (-135^0) \times \left(\frac{\pi}{180^0} \right) = \frac{-3\pi}{4} \text{ rad}$$

11) 75^0

الحل :-

$$75^0 = (75^0) \times \left(\frac{\pi}{180^0} \right) = \frac{5\pi}{12} \text{ rad}$$

12) 500^0

الحل :-

$$500^0 = (500^0) \times \left(\frac{\pi}{180^0} \right) = \frac{25\pi}{9} \text{ rad}$$

13) $\frac{-\pi}{7}$

الحل :-

$$\frac{-\pi}{7} = \left(\frac{-\pi}{7} \right) \times \left(\frac{180^0}{\pi} \right) = \left(\frac{-180}{7} \right)^0$$

14) $\frac{5\pi}{12}$

الحل :-

$$\frac{5\pi}{12} = \left(\frac{5\pi}{12} \right) \times \left(\frac{180^0}{\pi} \right) = 75^0$$

15) 1.2

الحل :-

$$1.2 = (1.2) \times \left(\frac{180^0}{\pi} \right) \approx 68.75^0$$

16) 4

الحل :-

$$4 = (4) \times \left(\frac{180^0}{\pi} \right) \approx 229.18^0$$

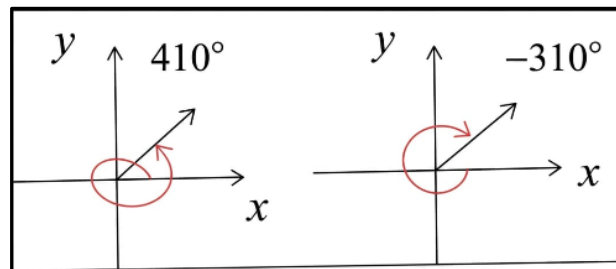
أجد زاويتين احدهما **قياسهما موجب** والأخرى **قياسها سالب** , وكلتاهما مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاه مما يأتي , ثم أرسمهما :-

17) 50^0

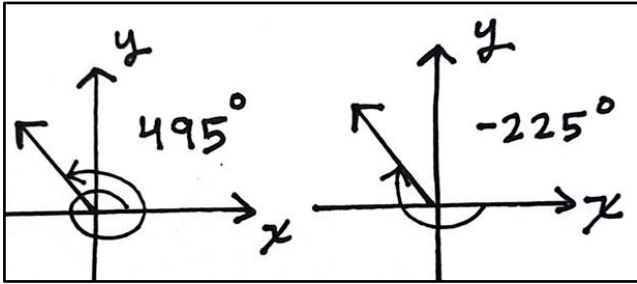
الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^0n$ ونستبدل مكان n

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$: $50^0 + 360^0 (1) = 410^0$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$: $50^0 + 360^0 (-1) = -310^0$



18) 135°



الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^\circ n$ ونستبدل مكان n

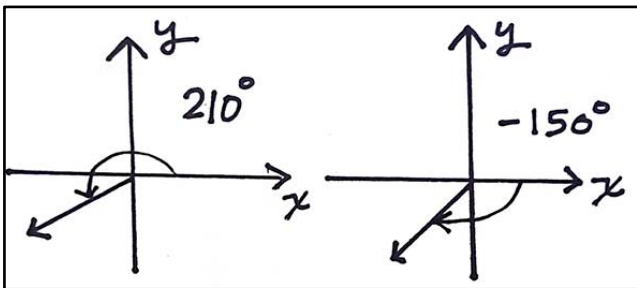
لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$

$$135^\circ + 360^\circ (1) = 495^\circ$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$

$$135^\circ + 360^\circ (-1) = -225^\circ$$

19) 1290°



الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^\circ n$ ونستبدل مكان n

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = -3$

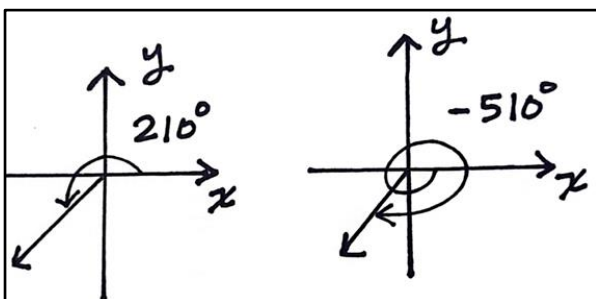
$$1290^\circ + 360^\circ (-3) = 210^\circ$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -4$

$$1290^\circ + 360^\circ (-4) = -150^\circ$$

ملاحظة :- أضفنا سالب للتقليل من الزاوية في حالة الموجب , حيث يجوز اضافة موجب

20) -150°



الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^\circ n$ ونستبدل مكان n

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$

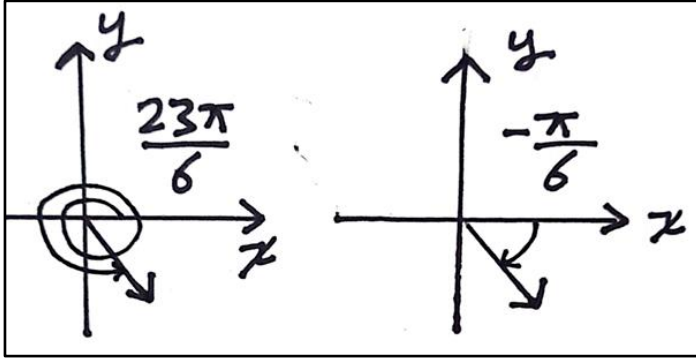
$$-150^\circ + 360^\circ (1) = 210^\circ$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$

$$-150^\circ + 360^\circ (-1) = -510^\circ$$

21) $\frac{11\pi}{6}$

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة



لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$

$$\frac{11\pi}{6} + 2(1)(\pi) = \frac{23\pi}{6}$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$

$$\frac{11\pi}{6} + 2(-1)(\pi) = \frac{-\pi}{6}$$

22) $\frac{-\pi}{4}$

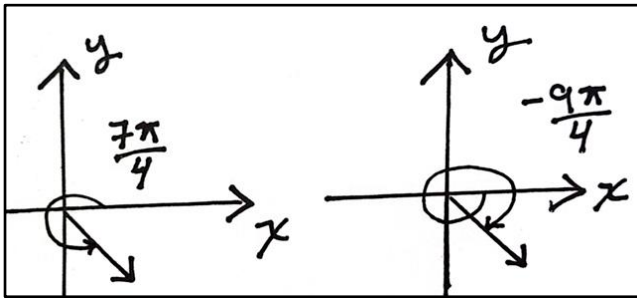
الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$

$$\frac{-\pi}{4} + 2(1)(\pi) = \frac{7\pi}{4}$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$

$$\frac{-\pi}{4} + 2(-1)(\pi) = \frac{-9\pi}{4}$$



23) $\frac{-\pi}{12}$

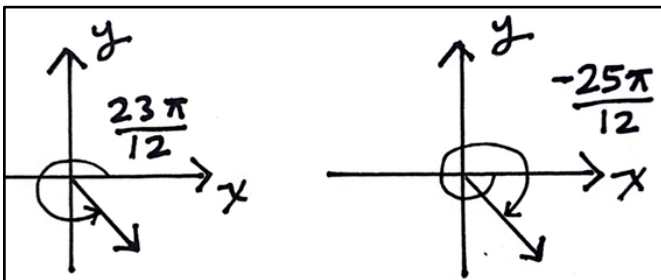
الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$

$$\frac{-\pi}{12} + 2(1)(\pi) = \frac{23\pi}{12}$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$

$$\frac{-\pi}{12} + 2(-1)(\pi) = \frac{-25\pi}{12}$$



24) $\frac{7\pi}{6}$

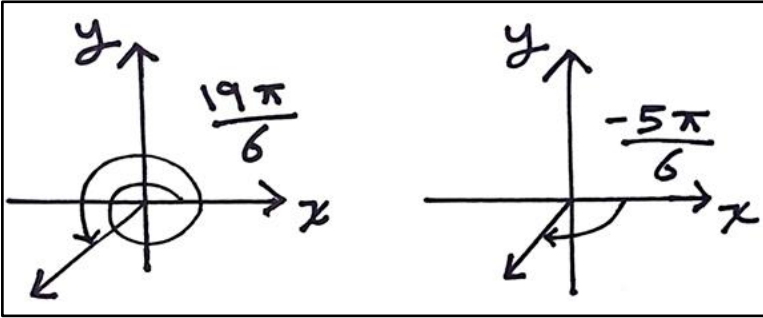
الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$

$$\frac{7\pi}{6} + 2(1)(\pi) = \frac{19\pi}{6}$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$

$$\frac{7\pi}{6} + 2(-1)(\pi) = \frac{-5\pi}{6}$$



أجد طول القوس ومساحة القطاع في كل مما يأتي , وأقرب اجابتي الى أقرب جزء من عشرة .

الحل :-

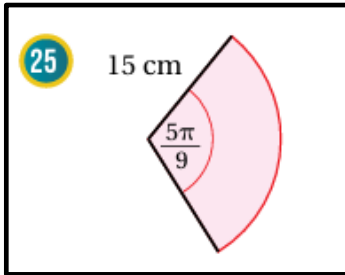
نلاحظ أن قياس الزاوية بالراديان , هنا نكتب القوانين ونعوض مباشرة

$$S = r \theta$$

$$S = (15)\left(\frac{5\pi}{9}\right) = 26.2 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (15)^2 \left(\frac{5\pi}{9}\right) = 196.3 \text{ cm}^2$$



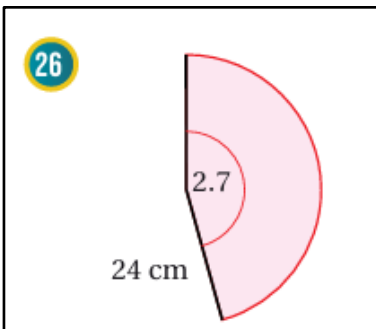
الحل :-

$$S = r \theta$$

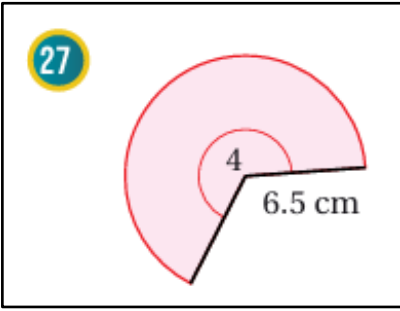
$$S = (24)(2.7) = 64.8 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (24)^2 (2.7) = 777.6 \text{ cm}^2$$



الحل :-



$$S = r \theta$$

$$S = (6.5)(4) = 26 \text{ cm}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (6.5)^2 (4) = 84.5 \text{ cm}^2$$

28) يدور طفل حجرا مربوطا بطرف حبل طوله 3 ft بمعدل 15 دورة في 10 ثوان .



أجد السرعة الزاوية والسرعة الخطية للحجر.

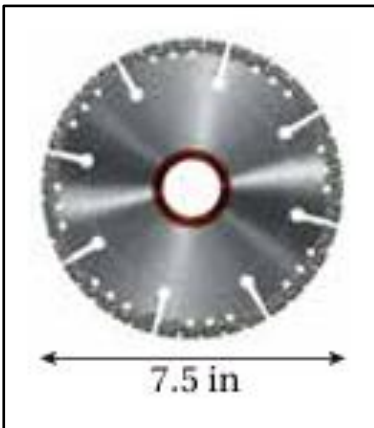
الحل :- هنا طول الحبل يمثل طول نصف القطر

$$\theta = (15)(2\pi) = 30\pi$$

$$= \frac{30\pi}{10} = 3\pi \text{ rad/s} \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$v = \frac{s}{t} = r \omega = (3)(3\pi) = 9\pi \text{ ft/s}$$

قطر شفرة منشار ماسية دائرية الشكل 7.5 in , وهي تدور 2400 دورة في الدقيقة :-



29) أجد السرعة الزاوية لهذه الشفرة بالراديان لكل ثانية .

30) أجد السرعة الخطية لأسنان المنشار عند ملامستها الرخام

المراد قطعه .

الحل :- هنا نصف القطر : $r = \frac{7.5}{2} = 3.75$

$$\theta = (2400)(2\pi) = 4800\pi$$

هنا معطى بالدقيقة والمطلوب بالثانية , وهنا عند التحويل الى الثواني نضرب في 60 وعليه $t = 60$

$$= \frac{4800\pi}{60} = 80\pi \text{ rad/s} \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$v = \frac{s}{t} = r \omega = (3.75)(80\pi) = 300\pi \text{ in/s}$$

مهارات التفكير العليا

31) أكتشف الخطأ : حول أحمد قياس الزاوية 24^0 من الدرجات الى الراديان كما هو مبين أدناه .

أكتشف الخطأ في حله وأصححه .

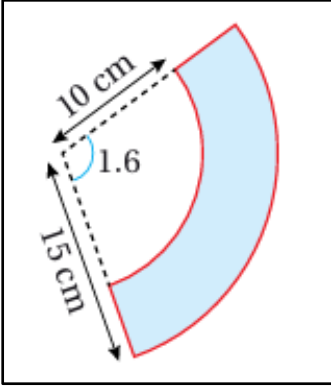
$$\begin{aligned} \times \quad 24^\circ &= 24^\circ \left(\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}} \right) \\ &= \frac{4320}{\pi} \text{ rad} \\ &\approx 1375.1 \text{ rad} \end{aligned}$$

الحل :-

أخطأ أحمد لأنه ضرب بـ $\frac{180^\circ}{\pi \text{ rad}}$ عند التحويل من درجات الى راديان , الصواب هو الضرب بـ $\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ}$

الصواب :-

$$24^0 = (24^0) \times \left(\frac{\pi \text{ rad}}{180^0} \right) = \frac{2\pi}{15} \text{ rad}$$



يمثل الشكل المظلل المجاور جزءا من قطاع دائري :-

32) أجد مساحة هذا الشكل

33) أجد محيط هذا الشكل .

الحل :-

32) نلاحظ وجود قوسان , القوس الأصغر من دائرة نصف قطرها 10 cm والقوس الأكبر من دائرة نصف قطرها 15cm , ولحساب المساحة المظلة نجد مساحة القطاع الأصغر A_1

ثم مساحة القطاع الأكبر A_2 ثم نطرحهما لحساب المساحة المظلة A

$$A = A_2 - A_1 = \frac{1}{2} (15)^2 (1.6) - \frac{1}{2} (10)^2 (1.6) = 180 - 80 = 100 \text{ cm}^2$$

33) لايجاد محيط الشكل المظلل , نلاحظ وجود قطع منحنية وقطع مستقيمة تحيط بالشكل , حيث القطع المنحنية

تمثل طول القوس للدائرة الصغرى s_1 وطول القوس للدائرة الكبرى s_2

والقطع المستقيمة طولها :- $5 + 5 = 10 \text{ cm}$ (أوجدناهم من طرح نصف القطر الاصغر من نصف القطر الأكبر)

$$s_1 = (10)(1.6) = 16 \text{ cm}, \quad s_2 = (15)(1.6) = 24 \text{ cm}$$

وعليه محيط الشكل المظلل :- $C = 16 + 24 + 10 = 50 \text{ cm}$

(34) أجد قياس الزاوية θ في الشكل المجاور

الحل :-

الزاوية المستقيمة قياسها بالدرجات 180^0

وقياسها بالراديان π

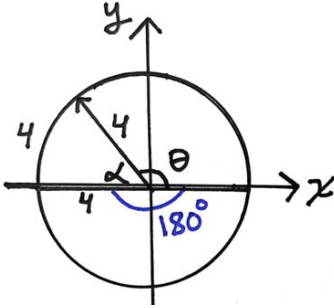
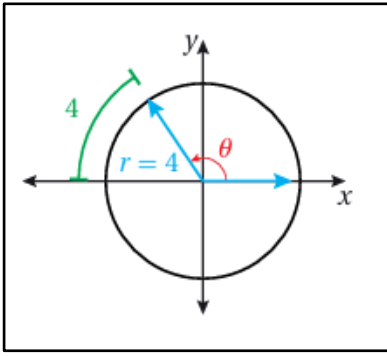
وعليه نجد أولاً قياس α لأنه طول القوس ونصف القطر معلوم , ثم نجد θ

$$S = r\alpha$$

$$4 = 4\alpha \longrightarrow \alpha = 1$$

$$\theta = (\pi - 1)rad$$

وعليه :



كتاب التمارين

أحول قياس الزاوية المكتوب بالدرجات الى الراديان , وقياس الزاوية المكتوب بالراديان الى الدرجات في كل مما يأتي :-

1) 225^0

الحل :-

$$225^0 = (225^0) \times \left(\frac{\pi}{180^0} \right) = \frac{5\pi}{4}$$

2) 840^0

الحل :-

$$840^0 = (840^0) \times \left(\frac{\pi}{180^0} \right) = \frac{14\pi}{3}$$

3) $\frac{11\pi}{6}$

الحل :- هنا نحول من الراديان الى الدرجات , أضرب في $\frac{180^0}{\pi}$ ثم اختصر

$$\frac{11\pi}{6} = \left(\frac{11\pi}{6} \right) \times \left(\frac{180^0}{\pi} \right) = 330^0$$

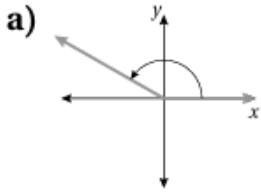
4) $\frac{-23\pi}{4}$

الحل :- هنا نحول من الراديان الى الدرجات , أضرب في $\frac{180^0}{\pi}$ ثم اختصر

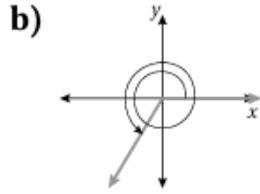
$$\frac{-23\pi}{4} = \left(\frac{-23\pi}{4} \right) \times \left(\frac{180^0}{\pi} \right) = -1035^0$$

أكتب بجانب كل زاوية مما يأتي رمز الرسم في الوضع القياسي المناسب لها من بين الرسومات (a – d) الظاهر أدناه :-

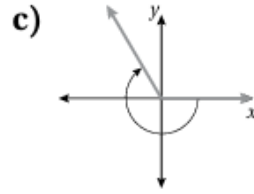
5 600°



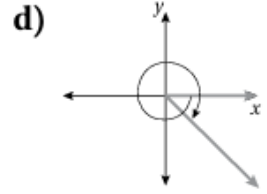
6 $-\frac{9\pi}{4}$



7 $\frac{5\pi}{6}$



8 -240°

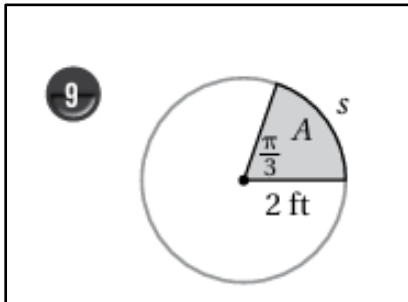


الحل :-

$$(600^\circ, b), \left(-\frac{9\pi}{4}, d\right), \left(\frac{5\pi}{6}, a\right), (-240^\circ, c)$$

أجد طول القوس ومساحة القطاع في كل مما يأتي , وأقرب اجابتي الى أقرب جزء من عشرة .

الحل :-



نلاحظ أن قياس الزاوية بالراديان , هنا نكتب القوانين ونعوض مباشرة.

$$S = r \theta$$

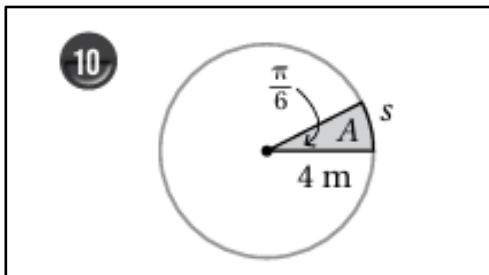
$$S = (2) \left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 2.1 \text{ ft}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (2)^2 \left(\frac{\pi}{3}\right) \approx 2.1 \text{ ft}^2$$

الحل :-

نلاحظ أن قياس الزاوية بالراديان , هنا نكتب القوانين ونعوض مباشرة



$$S = r \theta$$

$$S = (4) \left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 2.1 \text{ m}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (4)^2 \left(\frac{\pi}{6}\right) \approx 4.2 \text{ m}^2$$

الحل :-

نحول قياس الزاوية المركزية من الدرجات الى الراديان .

$$70^0 = 70^0 \left(\frac{\pi}{180^0} \right) = \frac{7\pi}{18}$$

$$S = r \theta$$

$$S = (12) \left(\frac{7\pi}{18} \right) \approx 14.7 \text{ yd}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$A = \frac{1}{2} (12)^2 \left(\frac{7\pi}{18} \right) \approx 88.0 \text{ yd}^2$$

12) اذا كانت مساحة دائرة 72 cm^2 , فأجد مساحة قطاع دائري من هذه الدائرة

يقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{\pi}{6}$

الحل :-

$$A = \pi r^2 \longrightarrow 72 = \pi r^2 \longrightarrow r^2 = \frac{72}{\pi}$$

نكتب قانون مساحة الدائرة :

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{72}{\pi} \right) \left(\frac{\pi}{6} \right) = 6 \text{ cm}^2$$

13) قطاع دائري نصف قطره 24 cm , ومساحته 288 cm^2 , أجد الزاوية المركزية لهذا القطاع

الحل :-

نكتب قانون مساحة القطاع ونعوض ونحل المعادلة :-

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$288 = \frac{1}{2} (24)^2 \theta$$

$$288 = 288 \theta$$

$$\theta = 1 \text{ rad}$$

14) يبلغ طول نصف القطر لبكرة رافعة 2 ft , وهي تستعمل لرفع الأحمال الثقيلة , وتؤدي

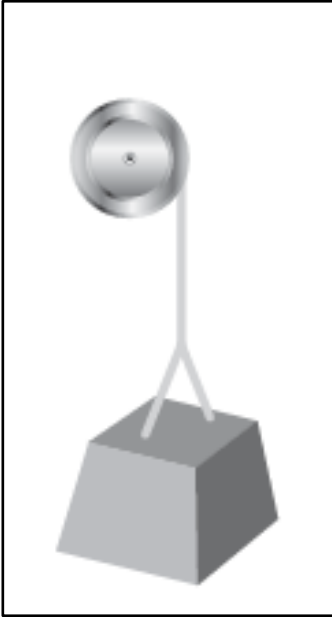
8 دورات كل 15 ثانية . أجد السرعة الخطية والزاوية للرافعة .

الحل :-

$$\theta = (8)(2\pi) = 16\pi$$

$$= \frac{16\pi}{15} \text{ rad/s} \omega = \frac{\theta}{t}$$

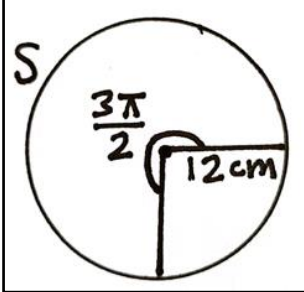
$$v = \frac{s}{t} = r \omega = (2) \left(\frac{16\pi}{15} \right) = \frac{32\pi}{15} \text{ ft/s}$$



ورقة عمل (1)

1 (قياس الزاوية 720^0 بالراديان هو :-

- a) 3π b) 4π c) $\frac{11\pi}{6}$ d) $\frac{15\pi}{7}$



2 (طول القوس المقابل للزاوية $\frac{3\pi}{2}$ في الدائرة المجاورة

- a) $18\pi \text{ cm}$ b) $17\pi \text{ cm}$
c) $32\pi \text{ cm}$ d) $19\pi \text{ cm}$

3 (قياس الدرجات الذي يساوي $-\frac{3\pi}{4}$ هو :-

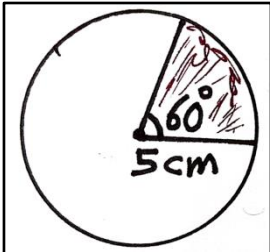
- a) 135^0 b) -135^0 c) -120^0 d) 130^0

4 (واحدة من الزوايا الاتية تعد زاوية مشتركة للزاوية -485^0

- a) -126^0 b) 234^0 c) 595^0 d) -844^0

5 (مساحة القطاع الدائري لدائرة نصف قطرها 5 cm وقياس زاويته المركزية $\frac{\pi}{5}$

- a) $\frac{7\pi}{8} \text{ cm}^2$ b) $\frac{9\pi}{2} \text{ cm}^2$ c) $\frac{2}{3\pi} \text{ cm}^2$ d) $\frac{5\pi}{2} \text{ cm}^2$



6 (مساحة القطاع الدائري المجاور :-

- a) $\frac{9\pi}{7} \text{ cm}^2$ b) $\frac{25\pi}{6} \text{ cm}^2$
c) $\frac{9}{11\pi} \text{ cm}^2$ d) $\frac{65\pi}{2} \text{ cm}^2$

7 (عند رسم الزاوية التي قياسها 520^0 في الوضع القياسي , فان ضلع الانتهاء يقع في :-

- a) محور x السالب b) الربع الثالث c) الربع الثاني d) الربع الأول

8 (عند رسم الزاوية التي قياسها -900^0 في الوضع القياسي , فان ضلع الانتهاء

ينطبق على محور :-

- a) محور x السالب b) محور x الموجب c) محور y السالب d) محور y الموجب

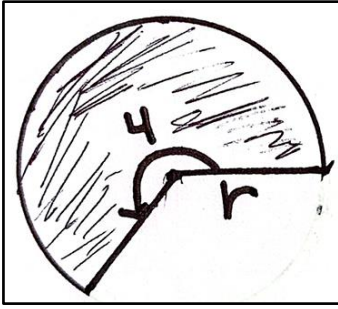


1	2	3	4	5	6	7	8	الفقرة
b	a	b	c	d	b	c	a	الاجابة



9) قطاع دائري مساحته 500cm^2 وطول قوسه 20 cm , فان قياس الزاوية بالراديان :-

- مهارات عليا a) $\frac{2}{5}\text{ rad}$ b) $\frac{3}{7}\text{ rad}$ c) $\frac{2}{7}\text{ rad}$ d) $\frac{7}{9}\text{ rad}$



10) طول نصف قطر القطاع المجاور علما بأن مساحته 84.5 cm^2

- a) 9.9 cm b) 12.6 cm
c) 6.5 cm d) 19.6 cm

11) يدور طفل كرة مربوطه بطرف حبل طوله 5 m بمعدل 15 دورة في 30 ثانية فان السرعة الخطية للكرة .

- a) $30\pi\text{ m/s}$ b) $5\pi\text{ m/s}$ c) $9\pi\text{ m/s}$ d) 15 m/s

12) قوس في دائرة طوله 7 cm يقابل زاوية مركزية قياسها 100° , فان طول قطر الدائرة

- a) $\frac{126}{5\pi}\text{ cm}$ b) $\frac{130}{7\pi}\text{ cm}$ c) $\frac{21}{7\pi}\text{ cm}$ d) $\frac{67}{9\pi}\text{ cm}$

13) طول قوس في قطاع دائري يساوي 4 أمثال طول نصف القطر , فان قياس زاويته المركزية

- a) 4 rad b) 5 rad c) 6 rad d) 15 m/s

14) قوس في دائرة طوله 14 cm يقابل زاوية مركزية قياسها $\frac{2\pi}{3}$ فان طول نصف قطر الدائرة لأقرب جزء من مئة

- a) 6.68 cm b) 9.98 cm c) 11.98 cm d) 5.98 cm

15) دائرة طول قطرها 12 cm , فان طول القوس المقابل للزاوية 120°

- a) $6\pi\text{ cm}$ b) $8\pi\text{ cm}$ c) $4\pi\text{ cm}$ d) $39\pi\text{ cm}$

16) قوس في دائرة طوله $7\pi\text{ cm}$ وطول نصف قطر الدائرة 18 cm فان مساحة القطاع الدائري

- a) $45\pi\text{ cm}^2$ b) $76\pi\text{ cm}^2$ c) $11\pi\text{ cm}^2$ d) $63\pi\text{ cm}^2$

17) الزاوية 1 rad يقابلها بالدرجات زاوية تساوي :-

- a) 56.3 b) 57.3 c) 58.3 d) 75.3

9	10	11	12	13	14	15	16	17	الفقرة
a	c	b	a	a	a	c	d	b	الاجابة

الاقتربان المثلثي

هو قاعدة معطاة باستعمال النسب المثلثية . وتستعمل قياسات أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وقياس زاوية حادة فيه لايجاد النسب المثلثية الست التي تحدد ستة اقترانات مثلثية .

مفهوم أساسي جميع الاقترانات المثلثية في مثلث قائم الزاوية

إذا مثلث θ قياس زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية , فإن الاقترانات المثلثية الستة تعرف بدلالة الوتر والضلع المقابل , والضلع المجاور كما يأتي :-

$$1) \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad (\text{الجيب})$$

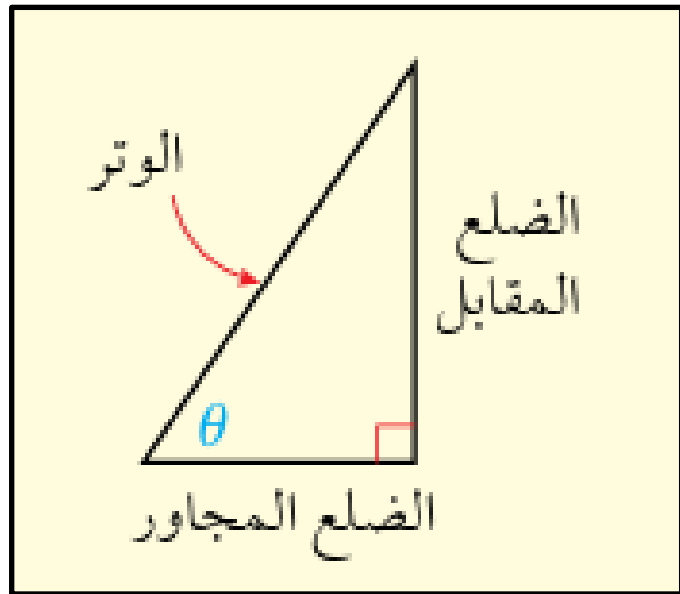
$$2) \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} \quad (\text{جيب التمام})$$

$$3) \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \quad (\text{الظل})$$

$$4) \csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} \quad (\text{قاطع التمام})$$

$$5) \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} \quad (\text{القاطع})$$

$$6) \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} \quad (\text{ظل التمام})$$



ملاحظات

(1) يطلق على اقترانات قاطع التمام , والقاطع , وظل التمام , اسم اقترانات المقلوب لأنها مقلوب نسب الجيب وجيب التمام , والظل على الترتيب , ويمكن تعريفها على النحو الآتي :-

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

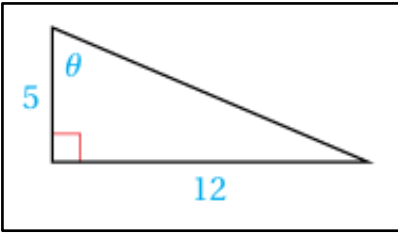
(2) يمكن اشتقاق العلاقات الآتية من تعريفات اقترانات الجيب وجيب التمام والظل , وظل التمام

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} , \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

تذكير (نظرية فيثاغورس)

مربع طول الوتر في المثلث القائم الزاوية يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

مثال (1) أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ



في المثلث المجاور

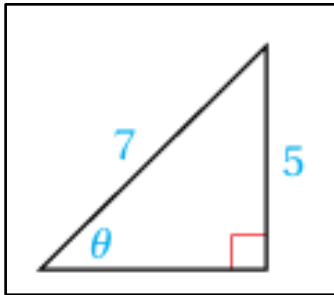
الحل :-

قبل ايجاد الاقترانات المثلثية الستة , يجب أن تكون أطوال أضلاع المثلث معلومة (هنا الوتر c مجهول)

نطبق نظرية فيثاغورس :- $c^2 = (5)^2 + (12)^2 \rightarrow c^2 = 169 \rightarrow c = 13$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{12}{5} \quad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{12}{13} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{13} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{13}{12} \quad , \quad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{13}{5} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{12}$$



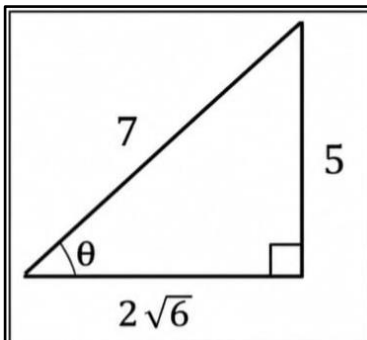
أتحقق من فهمي أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ

في المثلث المجاور

الحل :-

نجد أولاً طول الضلع المجاور (a) للزاوية θ من خلال تطبيق نظرية فيثاغورس .

$$7^2 = (5)^2 + (a)^2 \rightarrow a^2 = 24 \rightarrow a = 2\sqrt{6}$$



$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \quad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{5}{7} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{7}{5} \quad , \quad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{7}{2\sqrt{6}} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$$

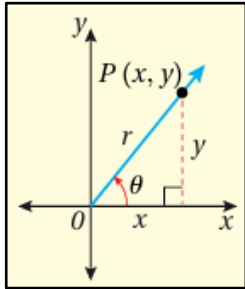
قيم الاقترانات المثلثية لأي زاوية باستعمال نقطة معلومة

يمكن تعميم تعريفات الاقترانات المثلثية الخاصة بالزاوية الحادة (في المثلث القائم الزاوية) لتشمل أي زاوية في الوضع القياسي .

مفهوم أساسي

الاقترانات المثلثية لأي زاوية

إذا كانت θ زاوية مرسومه في الوضع القياسي , والنقطة $P(x, y)$ تقع على ضلع الانتهاء للزاوية θ



r يمثل البعد بين النقطة P ونقطة الأصل , حيث: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r \neq 0$
فان الاقترانات المثلثية للزاوية θ تعرف كما يأتي :-

$$\sin \theta = \frac{y}{r} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} , x \neq 0$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} , y \neq 0 , \quad \sec \theta = \frac{r}{x} , x \neq 0 , \quad \cot \theta = \frac{x}{y} , y \neq 0$$

توضيح :-

زاوية تكون مرسومة في الوضع القياسي وضلع الانتهاء لها تقع عليه نقطة ومن خلال معرفة بعد هذه النقطة عن نقطة الاصل نستطيع معرفة الاقترانات الستة للزاوية .

مثال (2)

تقع النقطة $(-3, -5)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي .

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق

$$x = -3 , y = -5 , r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{34}} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}} , \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{34}}{-5} = -\frac{\sqrt{34}}{5} , \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{-3} = -\frac{\sqrt{34}}{3} , \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}$$

أتحقق من فهمي تقع النقطة $(-3, 1)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق

$$x = 1, y = -3, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{10}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{1} = -3$$

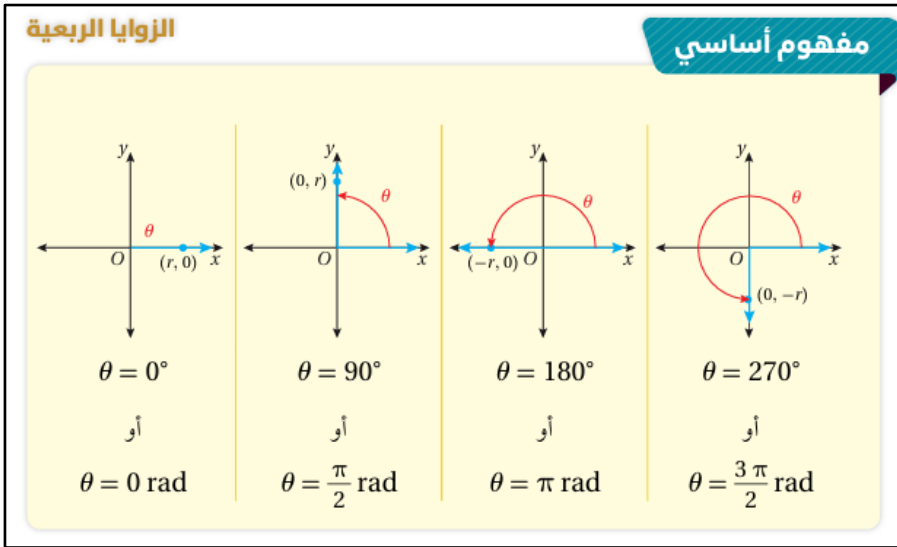
$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{10}}{-3} = -\frac{\sqrt{10}}{3}, \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-3} = -\frac{1}{3}$$

في الأمثلة السابقة تم ايجاد قيم الاقترانات المثلثية للزاوية θ من دون معرفة قياسها . وعليه سيتم الان طرأنق ايجاد قيم هذه الاقترانات عندما يكون قياس الزاوية θ فقط معلوما .

ايجاد قيم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية

نذكير :- اذا انطبق ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي على أحد المحورين الاحداثيين .

فان هذه الزاوية تسمى زاوية ربعية .



يمكن ايجاد قيم الاقترانات المثلثية للزوايا الربعية باختيار نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية , ثم ايجاد الاقتران المثلثي عند تلك النقطة . ولتسهيل عملية الحساب نختار $r = 1$ (دائرة الوحدة) .

الزوايا الربعية المشهورة في الدورة الأولى : $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$

ويوجد عدد لانتهائي من الزوايا الربعية التي تشترك مع الزوايا الربعية في الدورة الكاملة , وتكون قياساتها

مضاعفات 90° أو $\frac{\pi}{2}$

ملاحظات :-

من دائرة الوحدة نختار النقاط الآتية :-

محور x الموجب هنا $P(1, 0)$, محور y الموجب هنا $P(0, 1)$

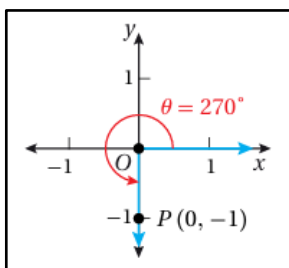
محور x السالب هنا $P(-1, 0)$, محور y السالب هنا $P(0, -1)$

بالمختصر :- احداثيات نقطة على دائرة الوحدة $(\cos \theta, \sin \theta)$

مثال (3)

أجد قيمة كل اقتران مثلثي مما يأتي اذا كان معرفا , والا أكتب عبارة (غير معرف).

1) $\cot 270^\circ$

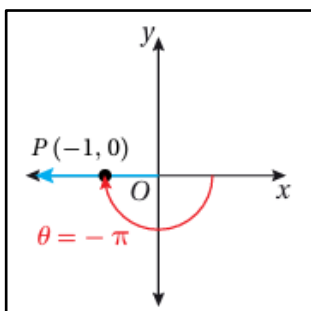


الحل :- يقع ضلع انتهاء الزاوية على محور y السالب وعليه نختار النقطة $P(0, -1)$

$$x = 0, y = -1, r = 1$$

$$0 \cot 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-1} =$$

2) $\csc(-\pi)$



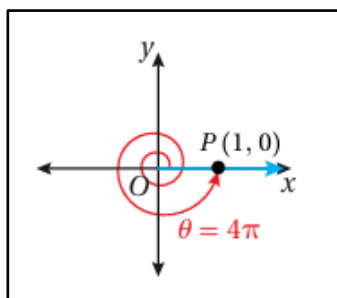
الحل :- يقع ضلع انتهاء الزاوية على محور x السالب وعليه نختار النقطة $P(-1, 0)$

$$x = -1, y = 0, r = 1$$

$$\csc(-\pi) = \frac{r}{y} = \frac{1}{0}$$

غير معرف

3) $\cos 4\pi$



الحل :- يقع ضلع انتهاء الزاوية على محور x الموجب وعليه نختار النقطة $P(1, 0)$

$$x = 1, y = 0, r = 1$$

$$\cos 4\pi = \frac{x}{r} = \frac{1}{1} = 1$$

توضيح :- نرسم الزوايا كما تعلمنا في الدرس الأول

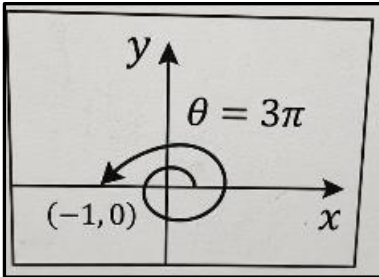
ملاحظة :- للسهولة والسرعة , من دائرة الوحدة يكون الاحداثي x هو جيب تمام الزاوية و y هو جيب الزاوية

وعند معرفة جيب أو جيب تمام الزاوية نجد الباقي من خلال متطابقات المقلوب والنسبية .

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل اقتران مثلثي مما يأتي اذا كان معرفا , والا أكتب عبارة (غير معرف).

1) $\sin 3\pi$



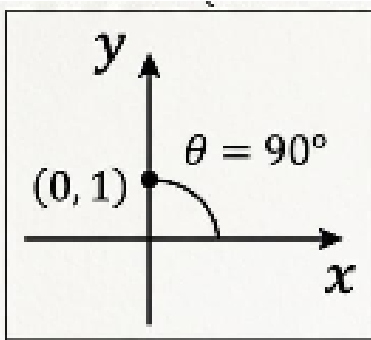
الحل :-

يقع ضلع انتهاء الزاوية على محور x السالب وعليه نختار النقطة $P(-1, 0)$

$$x = -1, y = 0, r = 1$$

$$\sin 3\pi = \frac{y}{r} = \frac{0}{1} = 0$$

2) $\tan 90^\circ$



الحل :-

يقع ضلع انتهاء الزاوية على محور y الموجب وعليه نختار النقطة $P(0, 1)$

$$x = 0, y = 1, r = 1$$

$$\tan 90^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{0}$$

غير معرف

3) $\sec\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$

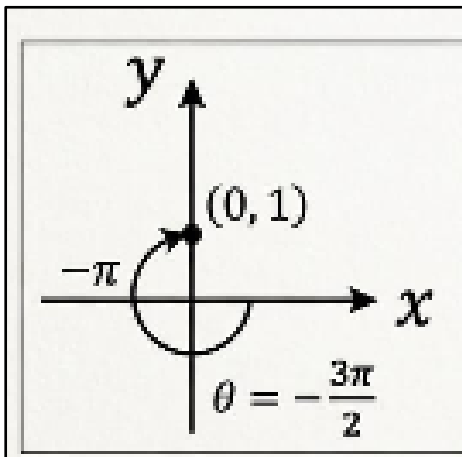
الحل :-

يقع ضلع انتهاء الزاوية على محور y الموجب وعليه نختار النقطة $P(0, 1)$

$$x = 0, y = 1, r = 1$$

$$\sec\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = \frac{r}{x} = \frac{1}{0}$$

غير معرف



ايجاد قيم الاقترانات المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية

إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي , فإن **الزاوية المرجعية** للزاوية θ هي الزاوية الحادة θ المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x .
يبين الجدول الاتي العلاقة بين θ و θ' لأي زاوية θ غير ربعية .

الزوايا المرجعية

مفهوم أساسي

الربع الرابع	الربع الثالث	الربع الثاني	الربع الأول
$\theta' = 360^\circ - \theta$ $\theta' = 2\pi - \theta$	$\theta' = \theta - 180^\circ$ $\theta' = \theta - \pi$	$\theta' = 180^\circ - \theta$ $\theta' = \pi - \theta$	$\theta' = \theta$

حيث نستخدم الزوايا المرجعية لاجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأي زاوية دون استخدام الآلة الحاسبة.
حيث تعتمد اشارة قيمة الاقتران المثلثي على الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ

خطوات ايجاد قيمة الاقترانات المثلثية لأي زاوية θ

(1) أجد قياس الزاوية المرجعية θ'

(2) أجد قيمة الاقتران المثلثي للزاوية المرجعية θ'

(3) نحدد اشارة قيمة الاقتران المثلثي للزاوية θ

بالاستعانة بالمخطط المجاور

الربع الثاني	الربع الأول
$\sin \theta, \csc \theta : (+)$	$\sin \theta, \csc \theta : (+)$
$\cos \theta, \sec \theta : (-)$	$\cos \theta, \sec \theta : (+)$
$\tan \theta, \cot \theta : (-)$	$\tan \theta, \cot \theta : (+)$
الربع الثالث	الربع الرابع
$\sin \theta, \csc \theta : (-)$	$\sin \theta, \csc \theta : (-)$
$\cos \theta, \sec \theta : (-)$	$\cos \theta, \sec \theta : (+)$
$\tan \theta, \cot \theta : (+)$	$\tan \theta, \cot \theta : (-)$

يبين الجدول الاتي قيم بعض الاقترانات المثلثية للزوايا الخاصة

θ	$30^0 = \frac{\pi}{6}$	$45^0 = \frac{\pi}{4}$	$60^0 = \frac{\pi}{3}$
$\sin \theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \theta$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$

وبما أن القيم المثلثية للزوايا الخاصة معلومة , فانه يمكن ايجاد قيم الاقترانات المثلثية لجميع الزوايا التي تمثل الزوايا الخاصة مرجعا لها .

ملاحظة :- الزوايا التي قياسها أكبر من 360^0 نجد زاوية مشتركة لها (كما تعلمنا سابقا) تقع في الدورة الاولى وكذلك اذا كانت سالبة نجد زاوية مشتركة لها .

مثال (4)

أجد قيمة كل مما يأتي :-

1) $\sin 135^0$

الحل :-

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = 180^0 - \theta$$

$$= 180^0 - 135^0 = 45^0$$

الجيب موجب في الربع الثاني

$$\sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) $\cos 600^\circ$

الحل :-

هنا الزاوية **أكبر من** 360° , وعليه نجد زاوية مشتركة مع الزاوية 600° قياسها موجب وأقل من 360° (كما تعلمنا سابقا).

$$600^\circ + (-1)(360^\circ) = 240^\circ$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

$$= 240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

جيب التمام سالب في الربع الثالث

$$\cos 600^\circ = -\cos 60^\circ = \frac{-1}{2}$$

3) $\csc \frac{17\pi}{6}$

الحل :-

الزاوية $\frac{17\pi}{6}$ **أكبر من** 2π , هنا نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{17\pi}{6}$ والتي قياسها موجب و أقل من 2π

$$\frac{17\pi}{6} + (-1)(2\pi) = \frac{5\pi}{6}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$= \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$$

قاطع التمام موجب في الربع الثاني , هنا نستخدم متطابقة المقلوب .

$$\csc \frac{17\pi}{6} = \csc \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

4) $\cot\left(\frac{-4\pi}{3}\right)$

الحل :-

بما ان الزاوية سالبة , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{-4\pi}{3}$ والتي قياسها موجب وأقل من 2π

$$\frac{-4\pi}{3} + (1)(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$= \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

ظل التمام سالب في الربع الثاني , هنا نستخدم متطابقة المقلوب .

$$\cot\left(\frac{-4\pi}{3}\right) = -\cot \frac{\pi}{3} = \frac{-1}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي :-

a) $\sin 210^\circ$

الحل :-

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

$$= 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$$

الجيب سالب في الربع الثالث :-

$$\sin 210^\circ = -\sin 30^\circ = \frac{-1}{2}$$

b) $\cos 510^\circ$

الحل :-

هنا الزاوية **أكبر من** 360° , وعليه نجد زاوية مشتركة مع الزاوية 510° قياسها موجب وأقل من 360° (كما تعلمنا سابقا).

$$510^\circ + (-1)(360^\circ) = 150^\circ$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , **نجد زاويتها المرجعية**

$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

$$= 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$$

جيب التمام سالب في الربع الثاني

$$\cos 510^\circ = -\cos 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

c) $\sec \frac{11\pi}{4}$

الحل :-

الزاوية $\frac{11\pi}{4}$ **أكبر من** 2π , هنا نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{11\pi}{4}$ والتي قياسها موجب و أقل من 2π

$$\frac{11\pi}{4} + (-1)(2\pi) = \frac{3\pi}{4}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$= \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

القاطع سالب في الربع الثاني , هنا نستخدم متطابقة المقلوب .

$$\sec \frac{11\pi}{4} = -\sec \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$$

d) $\tan\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

الحل :-

بما ان الزاوية **سالبة** , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{-2\pi}{3}$ والتي قياسها موجب وأقل من 2π

$$\frac{-2\pi}{3} + (1)(2\pi) = \frac{4\pi}{3}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \theta - \pi$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

الظل موجب في الربع الثالث

$$\tan\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

ملاحظة : $\tan -\theta = -\tan \theta$

ايجاد قيم الاقترانات المثلثية لزاوية علم الربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها

وقيمة اقتران مثلثي أو أكثر لها .

في الأمثلة السابقة تعلمنا ايجاد قيم الاقترانات المثلثية اذا علمت نقطة على ضلع الزاوية θ أو اذا علم قياسها

في المثال الاتي سنتعلم ايجاد قيم الاقترانات المثلثية **اذا علمت قيمة اقتران مثلثي أو أكثر للزاوية θ**

والربع الذي يقع فيه ضلع انتهائها .

توجد أكثر من طريقة للتعامل مع هذا النوع من الأسئلة , ومنها :-

(1) نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية من خلال اشارة الاقترانات المثلثية المعطاة .

(2) نحدد كل من x, y, r من خلال معطيات السؤال . ثم نجد الاقترانات المتبقية كما في مثال (1)

طرق اخرى

الاستفادة من المتطابقة **$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$** ومتطابقات المقلوب

لكن الكتاب يعتمد الطريقة الأولى وهي تحديد x, y, r

مثال (5)

إذا كان $\tan \theta = -4$, حيث $\sin \theta < 0$ فأجد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ

الحل :- بما أن $\tan \theta$ سالب و $\sin \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في الربع الرابع , هنا إشارة x موجبة وإشارة y سالبة

بما أن :- $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{1}$ هنا $x = 1, y = -4$ (ليس شرطاً , نستطيع اختيار أي عددين قسمتهم -4)

نجد r من نظرية فيثاغورس :-

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 16} = \sqrt{17}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{17}} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{17}}{-4} = -\frac{\sqrt{17}}{4} , \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{17}}{1} = \sqrt{17} , \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$$

أتحقق من فهمي

إذا كان $\sec \theta = 2$, حيث $\sin \theta < 0$ فأجد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ

الحل :- بما أن $\sec \theta$ موجب و $\sin \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في الربع الرابع , هنا إشارة x موجبة وإشارة y سالبة

بما أن :- $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{1}$ هنا $x = 1, r = 2$

نجد y من نظرية فيثاغورس :-

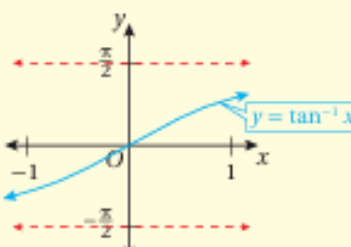
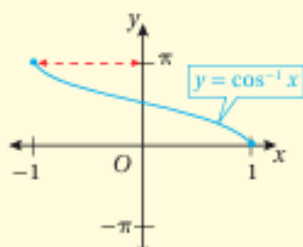
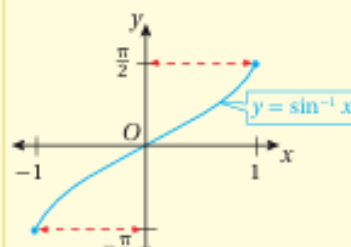
$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 4 = 1 + y^2 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3} \rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} , \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} , \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

معكوس اقتران الجيب , وجيب التمام , والظل

هنا يكون داخل الاقتران المثلثي الناتج , والمطلوب هو معرفة الزاوية

مفهوم أساسي		
معكوس اقتران الظل إذا $y = \tan^{-1} x$ ، $\tan y = x$ ، حيث: $-\infty < x < \infty$ ، $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ و المجال: $(-\infty, \infty)$. المدى: $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. 	معكوس اقتران جيب التمام إذا $y = \cos^{-1} x$ ، $\cos y = x$ ، حيث: $-1 \leq x \leq 1$ ، و $0 \leq y \leq \pi$ ، المجال: $[-1, 1]$. المدى: $[0, \pi]$. 	معكوس اقتران الجيب إذا $y = \sin^{-1} x$ ، $\sin y = x$ ، حيث: $-1 \leq x \leq 1$ ، $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ و المجال: $[-1, 1]$. المدى: $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. 

ملاحظات حسب المعكوس للاقترانات المثلثة الثلاث.

(1) ما داخل الجيب وجيب التمام تكون القيم تنتمي للفترة $[-1, 1]$ لانه كما نعلم بان :-

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

(2) ما داخل الظل تكون القيم تنتمي للفترة $(-\infty, \infty)$

(3) ما داخل الجيب موجب هنا تكون الزاوية موجبة في الربع الأول أما سالب هنا الزاوية سالبة

(الربع الرابع)

(4) ما داخل جيب التمام سالب , هنا الزاوية في الربع الثاني , أما ما داخله موجب هنا الزاوية

في الربع الأول.

(5) ما داخل الظل موجب هنا تكون الزاوية موجبة في الربع الأول أما سالب هنا الزاوية سالبة

(الربع الرابع)

مثال (6)

أجد قيمة كل مما يأتي (ان وجدت) في الفترة المعطاة ازاء كل منها :-

1) $\sin^{-1} \frac{1}{2}$, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ الحل :- الزاوية التي قيمة الجيب لها $\frac{1}{2}$ هي $\frac{\pi}{6}$, وعليه :- $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$	2) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$, $[0, \pi]$ الحل :- الزاوية التي قيمة جيب التمام لها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هي $\frac{\pi}{6}$, وعليه :- $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$	3) $\tan^{-1} 1$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ الحل :- الزاوية التي قيمة الظل لها 1 هي $\frac{\pi}{4}$, وعليه :- $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$
--	--	--

أتحقق من فهمي

أجد قيمة كل مما يأتي (ان وجدت) .

a) $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ الحل :- الزاوية التي قيمة الجيب لها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هي $\frac{\pi}{4}$, وعليه :- $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$	b) $\cos^{-1} 0$, $[0, \pi]$ الحل :- الزاوية التي قيمة جيب التمام لها 0 هي $\frac{\pi}{2}$, وعليه :- $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$	c) $\tan^{-1} \frac{-1}{\sqrt{3}}$, $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$ الحل :- الزاوية التي قيمة الظل لها $\frac{-1}{\sqrt{3}}$ هي $\frac{-\pi}{6}$, وعليه :- $\tan^{-1} \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\pi}{6}$
---	--	---

ملاحظة

داخل الظل أو الجيب سالب , نجد الزاوية التي ظلها أو جيبها ما داخلهم بالموجب ثم نضع للنتائج سالب .

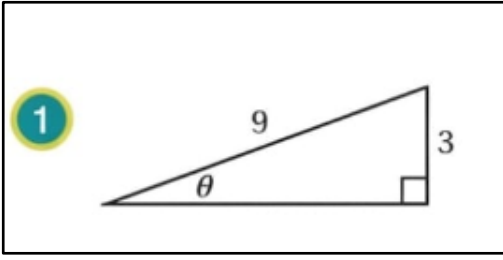
معلومة :-

إذا كان ما داخل معكوس الجيب أو جيب التمام أو الظل ناتج لزاوية غير مشهورة

هنا نلجأ الى الآلة الحاسبة.

أُتدرب وأحل المسائل

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كل مما يأتي :-



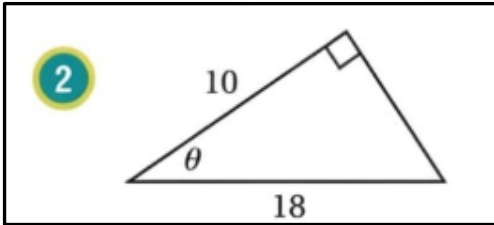
الحل :-

نجد أولاً طول الضلع المجاور للزاوية θ

نطبق نظرية فيثاغورس :- $9^2 = (3)^2 + (b)^2 \rightarrow b^2 = 72 \rightarrow b = 6\sqrt{2}$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{6\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{9}{3} = 3 \quad , \quad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} = 2\sqrt{2}$$



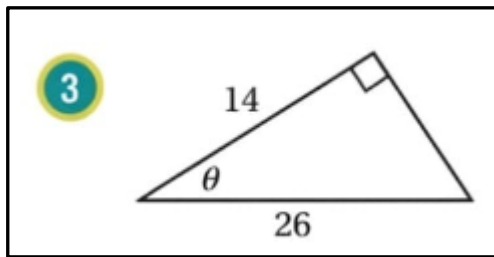
الحل :-

نجد أولاً طول الضلع المقابل للزاوية θ

نطبق نظرية فيثاغورس :- $18^2 = (10)^2 + (a)^2 \rightarrow a^2 = 224 \rightarrow a = 4\sqrt{14}$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4\sqrt{14}}{10} = \frac{2\sqrt{14}}{5} \quad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4\sqrt{14}}{18} = \frac{2\sqrt{14}}{9} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{9}{2\sqrt{14}} \quad , \quad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{9}{5} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{5}{2\sqrt{14}}$$



الحل :-

نجد أولاً طول الضلع المقابل للزاوية θ

نطبق نظرية فيثاغورس :- $26^2 = (14)^2 + (a)^2 \rightarrow a^2 = 480 \rightarrow a = 4\sqrt{30}$

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{4\sqrt{30}}{14} = \frac{2\sqrt{30}}{7} \quad \sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{4\sqrt{30}}{26} = \frac{2\sqrt{30}}{13} \quad , \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{14}{26} = \frac{7}{13} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}} = \frac{13}{2\sqrt{30}} \quad , \quad \sec \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}} = \frac{13}{7} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{7}{2\sqrt{30}}$$

تقع النقطة المعطاة في كل مما يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي . أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ

4) (-12 , 5)

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق .

$$x = -12, y = 5, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{144 + 25} = 13$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-12}{13}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{5}{-12} = -\frac{5}{12}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{13}{5}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{-13}{12}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-12}{5}$$

5) (3 , -3)

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق .

$$x = 3, y = -3, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = -\sqrt{2}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \sqrt{2}, \cot \theta = \frac{x}{y} = -1$$

6) (-2 , -5)

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق .

$$x = -2, y = -5, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-5}{\sqrt{29}}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-2}{\sqrt{29}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{-\sqrt{29}}{5}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{-\sqrt{29}}{2}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{2}{5}$$

7) (3, 7)

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق .

$$x = 3, y = 7, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{9 + 49} = \sqrt{58}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{7}{\sqrt{58}}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{\sqrt{58}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{7}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{58}}{7}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{58}}{3}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{7}$$

أجد قيمة كل مما يأتي :-

8) $\sec 135^\circ$

الحل :- الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

$$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

القاطع سالب في الربع الثاني

$$-\sqrt{2}\sec 135^\circ = -\sec 45^\circ = -\frac{1}{\cos 45^\circ} = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} =$$

9) $\tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right)$

الحل :- بما ان الزاوية سالبة , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{-3\pi}{4}$ والتي قياسها موجب وأقل من 2π

$$\frac{-3\pi}{4} + (1)(2\pi) = \frac{5\pi}{4}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \theta - \pi$$

$$= \frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$$

الظل موجب في الربع الثالث

$$\tan\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$10) \cot \frac{8\pi}{3}$$

الحل :-

الزاوية $\frac{8\pi}{3}$ أكبر من 2π , هنا نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{8\pi}{3}$ والتي قياسها موجب و أقل من 2π

$$\frac{8\pi}{3} + (-1)(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$= \pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

ظل التمام سالب في الربع الثاني , هنا نستخدم متطابقة المقلوب .

$$\cot \frac{8\pi}{3} = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$11) \cos \frac{7\pi}{4}$$

الحل :-

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الرابع , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = 2\pi - \theta$$

$$= 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

جيب التمام موجب في الربع الرابع .

$$\cos \frac{7\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$12) \sec \frac{15\pi}{4}$$

الحل :-

الزاوية $\frac{15\pi}{4}$ أكبر من 2π , هنا نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{15\pi}{4}$ والتي قياسها موجب و أقل من 2π

$$\frac{15\pi}{4} + (-1)(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الرابع , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = 2\pi - \theta$$

$$= 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

القاطع موجب في الربع الرابع , هنا نستخدم متطابقة المقلوب .

$$\sec \frac{15\pi}{4} = \sec \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$13) \csc (-630^\circ)$$

الحل :- بما ان الزاوية سالبة , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية -630° والتي قياسها موجب وأقل من 360°

$$-630^\circ + (2) 360^\circ = 90^\circ$$

زاوية ربعية يقع ضلع انتهائها على محور y الموجب وعليه نختار النقطة $P(0, 1)$

$$\csc(-630^\circ) = \csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

$$14) \tan 7\pi$$

الحل :-

الزاوية 7π أكبر من 2π , هنا نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية 7π والتي قياسها موجب و أقل من 2π

$$7\pi + (-3)(2\pi) = \pi$$

زاوية ربعية يقع ضلع انتهائها على محور x السالب , وعليه نختار $P(-1, 0)$

$$\tan 7\pi = \tan \pi = 0$$

15) $\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

الحل :-

بما ان الزاوية سالبة , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{-2\pi}{3}$ والتي قياسها موجب وأقل من 2π

$$\frac{-2\pi}{3} + (1)(2\pi) = \frac{4\pi}{3}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \theta - \pi$$

$$= \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

الجيب سالب في الربع الثالث

$$\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

أجد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كل مما يأتي :-

16) $\cos \theta = \frac{-7}{12}$, $\tan \theta > 0$

الحل :- بما أن $\cos \theta$ سالب و $\tan \theta$ موجب فان الزاوية θ تقع في الربع الثالث , هنا اشارة x سالبة

واشارة y سالبة

بما أن :- $r = 12$, $x = -7$ هنا , $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-7}{12}$

نجد y من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 144 = 49 + y^2 \rightarrow y^2 = 95 \rightarrow y = \pm\sqrt{95} \rightarrow y = -\sqrt{95}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{95}}{12} , \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{12}{-7} = \frac{-12}{7}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{12}{-\sqrt{95}} = \frac{-12}{\sqrt{95}} , \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{95}}{-7} = \frac{\sqrt{95}}{7} , \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-7}{-\sqrt{95}} = \frac{7}{\sqrt{95}}$$

17) $\sec \theta = 5$, $\sin \theta < 0$

الحل :-

بما أن $\sec \theta$ موجب و $\sin \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في الربع الرابع , هنا إشارة x موجبة وإشارة y سالبة

بما أن:- $r = 5$, $x = 1$ هنا , $\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{1}$

نجد y من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 25 = 1 + y^2 \rightarrow y^2 = 24 \rightarrow y = \pm 2\sqrt{6} \rightarrow y = -2\sqrt{6}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-2\sqrt{6}}{5} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{5}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-2\sqrt{6}} = -\frac{5}{2\sqrt{6}} , \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-2\sqrt{6}}{1} = -2\sqrt{6} , \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-2\sqrt{6}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$$

18) $\cot \theta = \frac{1}{4}$, $\sin \theta < 0$

الحل :-

بما أن $\cot \theta$ موجب و $\sin \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في الربع الثالث , هنا إشارة x سالبة وإشارة y سالبة

بما أن:- $x = -1$, $y = -4$ هنا , $\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{4} = \frac{-1}{-4}$

نجد r من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r^2 = 1 + 16 \rightarrow r^2 = 17 \rightarrow r = \sqrt{17}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{\sqrt{17}} , \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{17}}{-4} = -\frac{\sqrt{17}}{4} , \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{-1} = 4 , \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{17}}{-1} = -\sqrt{17}$$

19) $\csc \theta = 2, \cos \theta > 0$

الحل :- بما أن $\csc \theta$ موجب و $\cos \theta$ موجب فان الزاوية θ تقع في الربع الأول , هنا إشارة x موجبة وإشارة y موجب

بما أن :- $\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{1}$ هنا $r = 2, y = 1$ نجد x من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 4 = 1 + x^2 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

أجد قيمة كل مما يأتي (ان وجدت) في الفترة المعطاة ازاء كل منها :-

20) $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2}), [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ الحل :- الزاوية التي قيمة الجيب لها $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ هي $\frac{-\pi}{3}$, وعليه :- $\sin^{-1}(\frac{-\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\pi}{3}$	21) $\tan^{-1}(\sqrt{3}), (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ الحل :- الزاوية التي قيمة الظل لها $\sqrt{3}$ هي $\frac{\pi}{3}$, وعليه :- $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$	22) $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}), [0, \pi]$ الحل :- الزاوية التي قيمة جيب التمام لها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هي $\frac{\pi}{4}$, وعليه :- $\cos^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{4}$
--	--	---

إذا كان :- $\cos \frac{\pi}{12} = 0.966$ لأقرب ثلاث منازل عشرية , فاستعمل هذه الحقيقية لإيجاد قيمة كل مما يأتي .

23) $\cos \frac{13\pi}{12}$

الحل :- الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \theta - \pi$$

$$= \frac{13\pi}{12} - \pi = \frac{\pi}{12}$$

جيب التمام سالب في الربع الثالث

$$\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} = -0.966$$

$$24) \cos \frac{11\pi}{12}$$

الحل :- الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني , نجد زاويتها المرجعية .

$$\theta' = \pi - \theta$$

$$= \pi - \frac{11\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

جيب التمام سالب في الربع الثاني

$$\cos \frac{11\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12} = -0.966$$

$$25) \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)$$

الحل :-

بما ان الزاوية سالبة , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{-\pi}{12}$ والتي قياسها موجب وأقل من 2π

$$\frac{-\pi}{12} + (1)(2\pi) = \frac{23\pi}{12}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الرابع , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = 2\pi - \theta$$

$$= 2\pi - \frac{23\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

جيب التمام في الربع الرابع موجب .

$$\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \cos \frac{\pi}{12} = 0.966$$

$$26) \cos\left(\frac{23\pi}{12}\right)$$

الحل :- الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الرابع , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = 2\pi - \theta$$

$$= 2\pi - \frac{23\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

جيب التمام في الربع الرابع موجب .

$$\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0.966$$

أجد قيمة كل مما يأتي :-

$$27) (\cos \frac{3\pi}{4})^2 + (\sin \frac{4\pi}{3})^2 + (\cos \frac{5\pi}{4})^2$$

الحل :- نجد قيمة كل مقدار لوحده ثم نعوض .

$$\cos \frac{3\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{5\pi}{4} = -\cos \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

نعوض :-

$$(\frac{-1}{\sqrt{2}})^2 + (\frac{-\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{-1}{\sqrt{2}})^2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$$

$$28) \sin \frac{\pi}{3} - \sin \frac{2\pi}{3} + \sin \pi - \sin \frac{4\pi}{3} + \sin \frac{5\pi}{3} - \sin 2\pi$$

الحل :- نجد قيمة كل مقدار لوحده ثم نعوض .

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \pi = 0$$

$$\sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin \frac{5\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2\pi = 0$$

نعوض :-

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 0 - \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{-\sqrt{3}}{2} - 0 = 0$$

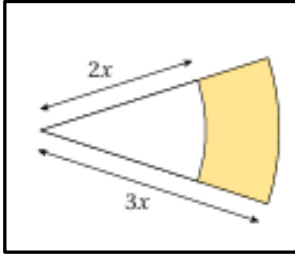
مهارات التفكير العليا

(29) **تحديد** يبين الشكل المجاور قطاعين دائريين ناتجين من دائرتين متحدتين في المركز .

إذا كان قياس زاوية القطاعين 0.75 ومساحة الجزء المظلل 30cm^2

فأجد قيمة x

الحل :-



نلاحظ وجود قوسان , القوس الأصغر من دائرة نصف قطرها $2x$ والقوس الأكبر من دائرة نصف قطرها $3x$, والمساحة المظلمة A تمثل فرقا بين قطاعين متحدان بالمركز القطاع الأكبر A_1 نصف قطره $3x$ والقطاع الأصغر A_2 نصف قطره $2x$

$$A = A_1 - A_2$$

$$30 = \frac{1}{2} (3x)^2 (0.75) - \frac{1}{2} (2x)^2 (0.75) \rightarrow 30 = 3.375x^2 - 1.5x^2$$

$$30 = 1.875x^2 \rightarrow x^2 = \frac{30}{1.875} = 16 \rightarrow x = \pm \sqrt{16} = \pm 4 \rightarrow x = 4$$

أثبت كلا مما يأتي , وأبرر اجابتي :-

$$30) \tan 210^\circ + \tan 240^\circ = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

الحل :-

نجد أولا قيم كل حد في الطرف الايسر :-

$$\tan 210^\circ = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tan 240^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

نعوض في الطرف الايسر , نقوم بعمليات التبسيط الى أن نصل للطرف الأيمن

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

نعمل انطاق للمقام .

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$31) \frac{\sin 30^0 + \sin 60^0}{\sin 45^0} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

الحل :-

نجد أولاً قيم كل حد في الطرف الأيسر :-

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

نعوض في الطرف الأيسر , نقوم بعمليات التبسيط الى أن نصل للطرف الأيمن

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{(1 + \sqrt{3})}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$$

$$32) \cos 30^0 + \cos 45^0 + \cos 60^0 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

الحل :-

نجد أولاً قيم كل حد في الطرف الأيسر :-

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

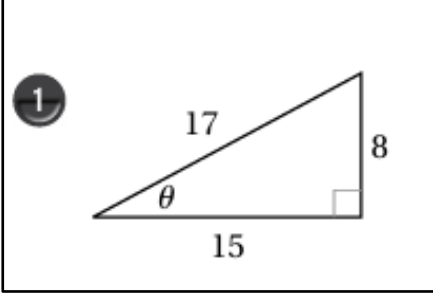
نعوض في الطرف الأيسر , نقوم بعمليات التبسيط الى أن نصل للطرف الأيمن من خلال اخراج $\frac{1}{2}$ عامل مشترك

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1) = \frac{1}{2} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

كتاب التمارين

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كل مما يأتي :-

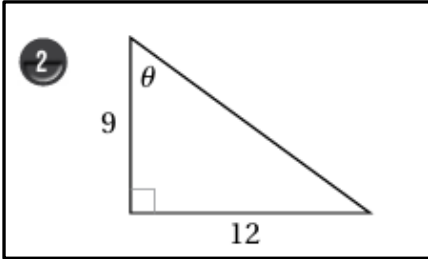
الحل :- أطوال أضلاع المثلث جاهزة .



$$\tan \theta = \frac{8}{15} \quad \sin \theta = \frac{8}{17} \quad , \quad \cos \theta = \frac{15}{17} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{17}{8} \quad , \quad \sec \theta = \frac{17}{15} \quad , \quad \cot \theta = \frac{15}{8}$$

الحل :- الوتر مجهول.



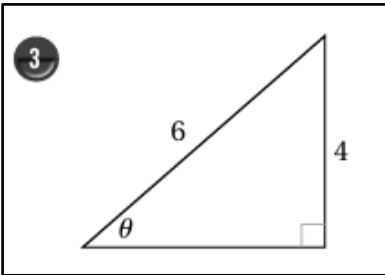
$$c^2 = (12)^2 + (9)^2 \rightarrow c^2 = 225 \rightarrow c = 15$$

$$\tan \theta = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \quad \sin \theta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \quad , \quad \cos \theta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{5}{4} \quad , \quad \sec \theta = \frac{5}{3} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{3}{4}$$

الحل :-

نجد أولاً طول الضلع المجاور للزاوية θ



$$6^2 = (4)^2 + (b)^2 \rightarrow b^2 = 20 \rightarrow b = 2\sqrt{5}$$

$$\tan \theta = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad \sin \theta = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad , \quad \cos \theta = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad ,$$

$$\csc \theta = \frac{3}{2} \quad , \quad \sec \theta = \frac{3}{\sqrt{5}} \quad , \quad \cot \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

تقع النقطة المعطاة في كل مما يأتي على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي . أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ .

4) (-6 , 6)

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق .

$$x = -6, y = 6, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{36 + 36} = 6\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-6}{6\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{6}{-6} = -1$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \sqrt{2}, \sec \theta = \frac{r}{x} = -\sqrt{2}, \cot \theta = \frac{x}{y} = -1$$

5) (5 , -3)

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق .

$$x = 5, y = -3, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{5}{\sqrt{34}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{5}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{-\sqrt{34}}{3}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{34}}{5}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-5}{3}$$

6) (-8 , 15)

الحل :- نحدد كل من x, y, r ثم نطبق .

$$x = -8, y = 15, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{64 + 225} = 17$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{15}{17}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-8}{17}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{15}{-8} = \frac{-15}{8}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{17}{15}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{-17}{8}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-8}{15}$$

أجد قيمة كل مما يأتي:-

7) $\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$

الحل :-

بما ان الزاوية سالبة , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{-\pi}{4}$ والتي قياسها موجب وأقل من 2π

$$\frac{-\pi}{4} + (1)(2\pi) = \frac{7\pi}{4}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الرابع , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

الجيب سالب في الربع 1لرابع

$$\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -\sin \frac{\pi}{4} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

8) $\cos \frac{7\pi}{6}$

الحل :- الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$\theta' = \frac{7\pi}{6} - \pi = \frac{\pi}{6}$$

جيب التمام سالب في الربع الثالث .

$$\cos \frac{7\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

9) $\tan \frac{13\pi}{6}$

الحل :-

الزاوية $\frac{13\pi}{6}$ أكبر من 2π , هنا نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{13\pi}{6}$ والتي قياسها موجب و أقل من 2π

$$\frac{13\pi}{6} + (-1)(2\pi) = \frac{\pi}{6}$$

$$\tan \frac{13\pi}{6} = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

10) $\sec (-150^\circ)$

الحل :-

بما ان الزاوية سالبة , نجد أولا الزاوية المشتركة مع الزاوية -150° والتي قياسها موجب وأقل من 360°

$$-150^\circ + 360^\circ = 210^\circ$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية

$$= 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ \theta/$$

القاطع سالب في الربع الثالث

$$\sec(-150)^\circ = -\sec 30^\circ = -\frac{1}{\cos 30^\circ} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$$

11) $\cot \frac{4\pi}{3}$

الحل :-

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث , نجد زاويتها المرجعية .

$$\theta/ = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$$

ظل التمام موجب في الربع الثالث موجب , هنا نستخدم متطابقة المقلوب .

$$\cot \frac{4\pi}{3} = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\tan \frac{\pi}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

12) $\sin 300^\circ$

الحل :-

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الرابع , نجد زاويتها المرجعية

$$= 360^\circ - 300^\circ = 60^\circ \theta/$$

الجيب سالب في الربع الرابع

$$\sin(300)^\circ = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

أجد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كل مما يأتي :-

13) $\csc \theta = 2, \cos \theta < 0$

الحل :-

بما أن $\csc \theta$ موجب و $\cos \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في الربع الثاني , هنا إشارة x سالب وإشارة y موجب

بما أن :- $\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{1}$ هنا $r = 2, y = 1$

نجد x من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 4 = 1 + x^2 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = -\sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{-2}{\sqrt{3}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{\sqrt{3}}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

14) $\cot \theta = 1, \sin \theta > 0$

الحل :-

بما أن $\cot \theta$ موجب و $\sin \theta$ موجب فإن الزاوية θ تقع في الربع الأول , هنا إشارة x موجبة وإشارة y موجبة

بما أن :- $\cot \theta = \frac{x}{y} = 1 = \frac{1}{1}$ هنا $x = 1, y = 1$

نجد r من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow r^2 = 1 + 1 \rightarrow r^2 = 2 \rightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{1}{1} = 1, \quad \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$15) \sin \theta = \frac{-1}{5}, \cos \theta > 0$$

الحل :-

بما أن $\cos \theta$ موجب و $\sin \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في **الربع الرابع** , هنا إشارة x **موجب** وإشارة y **سالبة**

$$\text{بما أن:-} \quad r = 5, y = -1, \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{5}$$

نجد x من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 25 = 1 + x^2 \rightarrow x^2 = 24 \rightarrow x = \pm\sqrt{24} \rightarrow x = 2\sqrt{6}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{5}{-1} = -5, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{2\sqrt{6}}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{2\sqrt{6}}{-1} = -2\sqrt{6}$$

$$16) \sec \theta = \sqrt{3}, \sin \theta < 0$$

الحل :-

بما أن $\sec \theta$ موجب و $\sin \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في **الربع الرابع** , هنا إشارة x **موجبة** وإشارة y **سالبة**.

$$\text{بما أن:-} \quad r = \sqrt{3}, x = 1, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1}$$

نجد y من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 3 = 1 + y^2 \rightarrow y^2 = 2 \rightarrow y = -\sqrt{2}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\sqrt{\frac{2}{3}}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

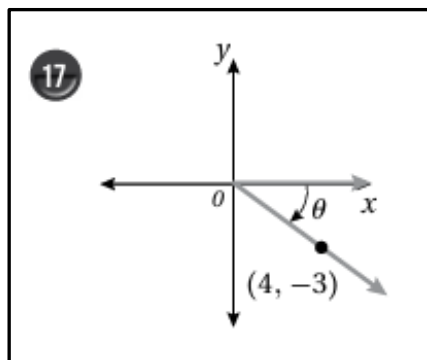
$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{\sqrt{3}}{-\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{3}{2}}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{2}}{1} = -\sqrt{2}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

أجد قيم الاقترانات المثلثية الستة للزاوية θ في كل مما يأتي :-

ملاحظة

معطى بالسؤال نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية , نقوم بالحل كما في الأسئلة السابقة 4, 5, 6

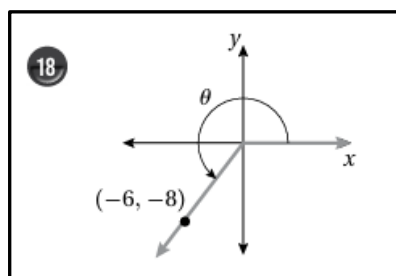
الحل :-



$$x = 4, y = -3, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{5}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-3}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{-5}{3}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{4}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-4}{3}$$

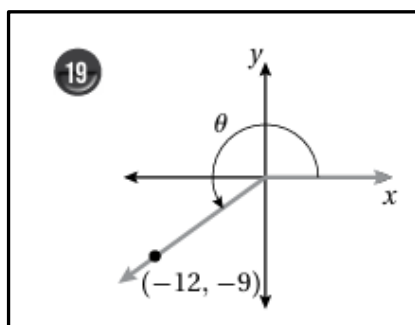


الحل :-

$$x = -6, y = -8, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-6}{10} = \frac{-3}{5}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{-5}{4}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{-5}{3}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$$



الحل :-

$$x = -12, y = -9, r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{144 + 81} = 15$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-9}{15} = \frac{-3}{5}, \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-12}{15} = \frac{-4}{5}, \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-9}{-12} = \frac{3}{4}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{-5}{3}, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{-5}{4}, \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$$

إذا كان $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = 2x$, فأوجد قيمة كل مما يأتي :-

$$20) f\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + f\left(\frac{4\pi}{3}\right) + f\left(\frac{\pi}{6}\right) \quad 21) (h \circ g)\left(\frac{17\pi}{3}\right) \quad 22) (h \circ f)\left(\frac{11\pi}{4}\right)$$

الحل :- 20) نجد قيمة كل حد , ثم نجمع .

$$f\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sin \frac{3\pi}{2} = -1 , f\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin \frac{4\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} , f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}}{2} \quad \text{نعوض :-}$$

$$21) (h \circ g)\left(\frac{17\pi}{3}\right) = h\left(g\left(\frac{17\pi}{3}\right)\right)$$

$$g\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \cos \frac{17\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$= h\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$22) (h \circ f)\left(\frac{11\pi}{4}\right) = h\left(f\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right)$$

$$f\left(\frac{11\pi}{4}\right) = \sin \frac{11\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= h\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$$

إذا كان $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ = 0.940$, فأستعمل هذه الحقيقة لاجاد قيمة كل مما يأتي :-

$$23) \cos 560^\circ$$

الحل :-

$$\cos 560^\circ = \cos 200^\circ = -\cos 20^\circ = -0.940$$

$$24) \sin 430^\circ$$

الحل :-

$$\sin 430^\circ = \sin 70^\circ = 0.940$$

$$25) \sin 470^\circ$$

الحل :-

$$\sin 470^\circ = \sin 110^\circ = \sin 70^\circ = 0.940$$

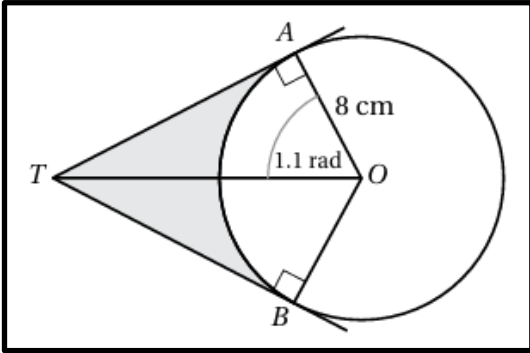
$$26) \cos(-380^\circ)$$

الحل :-

$$\cos(-380^\circ) = \cos 340^\circ = \cos 20^\circ = 0.940$$

يبين الشكل المجاور دائرة مركزها O , وطول نصف قطرها 8 cm , اذا كان $\overline{TA}$ و $\overline{TB}$

مماسين للدائرة , وكان $\angle AOT = 1.1$ rad , فأجد كلا مما يأتي :-



(27) طول TA

(28) مساحة الجزء المظلل .

الحل :-

(27) المثلث TAO قائم الزاوية , نستخدم الظل لايجاد TA

$$\tan(\angle AOT) = \frac{TA}{AO}$$

$$\tan 1.1 = \frac{TA}{8} \rightarrow TA = (8)(\tan(1.1)) \approx 15.72 \text{ cm}$$

(28) المثلثان TAO , TBO متطابقان لان :-

$TA = TB$ (مماسان للدائرة من نقطة خارجية (نظرية))

$OA = OB$ (أنصاف أقطار)

TO (ضلع مشترك)

من التطابق :- $\angle AOB = 2(1.1) = 2.2$ rad

المساحة المظلمة هي مجموع مساحتي المثلثين TAO , TBO مطروح منه مساحة القطاع الدائري OAB

مساحة المثلث TAO

$$\text{Area} = \left(\frac{1}{2}\right) (\text{القاعدة}) (\text{الارتفاع}) = \left(\frac{1}{2}\right) (8) (15.72) \approx 62.87 \text{ cm}^2$$

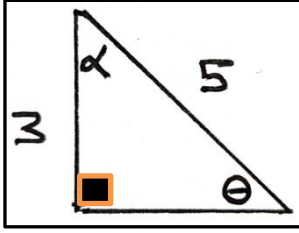
مساحة القطاع الدائري

$$\text{Area} = \left(\frac{1}{2}\right) (8)^2 (2.2) = 70.4 \text{ cm}^2$$

المساحة المظلمة

$$2 (62.87) - 70.4 = 55.34 \text{ cm}^2$$

ورقة عمل (2)



1) في الشكل المجاور , فان قيمة $\tan \theta + \cos \alpha$

a) $\frac{27}{20}$

b) $\frac{20}{27}$

c) $\frac{3}{5}$

c) $\frac{3}{4}$

2) تقع النقطة $(-2, -4)$ على ضلع انتهاء الزاوية θ المرسومة في الوضع القياسي

فان قيمة $\frac{\cos \theta}{\sec \theta}$

a) 25

b) $\frac{1}{25}$

c) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{1}{5}$

3) اذا كان $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, حيث $\sin \theta < 0$ فان قيمة $\tan \theta$

a) -5

b) $-\frac{1}{4}$

c) -4

b) 4

4) اذا كانت $\cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2}$ والزاوية θ تقع في الربع الثالث , فان قيمة θ :-

a) 135°

b) 225°

c) 315°

d) 210°

5) اذا كان $\theta = \tan^{-1} \sqrt{3}$ فان قيمة 2θ

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{2\pi}{3}$

d) π

6) أي العبارات الآتية صحيحة لأي زاوية θ في الربع الثاني

a) $\cos \theta > 0, \sin \theta > 0$

b) $\sec \theta > 0, \sin \theta < 0$

c) $\cos \theta < 0, \csc \theta > 0$

d) $\cos \theta < 0, \sin \theta < 0$

7) اذا كان $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{3}$ فان قيمة x هي :-

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) 1

1	2	3	4	5	6	7	الفقرة
a	b	c	b	c	c	a	الاجابة

8) إذا كانت $\theta = \tan^{-1} 1$ فإن قيمة $\sin 2\theta$

- a) -1 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{-1}{2}$

9) إذا كان: $\cos \frac{\pi}{12} = 0.966$ لأقرب ثلاث منازل عشرية , باستعمال هذه الحقيقة

فإن قيمة $\cos \frac{25\pi}{12}$:-

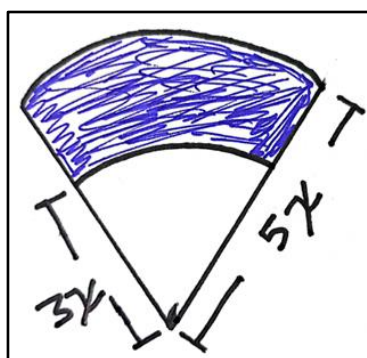
- a) -0.966 b) 0.966 c) 0.034 d) -0.034

10) قيمة $\sin(\tan^{-1} \sqrt{3})$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) 1

11) يبين الشكل المجاور قطاعين دائريين ناتجين من دائرتين متحنتين في المركز .

إذا كان قياس زاوية القطاعين 0.5 ومساحة الجزء المظلل 25cm^2 فأجد قيمة x :-



- a) 3 b) 2.5
c) 2 d) 3.5

12) إذا كان $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2x$ فإن قيمة $(f \circ g)(\frac{\pi}{4})$

- a) 0 b) 1 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

13) قيمة $\frac{\sin 60^\circ - \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ}$

- a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ c) $\sqrt{2}$ d) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

14) قيمة $\sin^{-1}(\sin \frac{5\pi}{6})$

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{6}$ d) π

8	9	10	11	12	13	14	الفقرة
b	b	c	b	b	a	c	الاجابة

تمثيل الاقتران $f(x) = \sin x$, والاقتران $f(x) = \cos x$ بيانيا

تعلمت سابقا تمثيل الاقترانين المثلثين : $y = \sin x$, $y = \cos x$ عندما تكون الزوايا بالدرجات في الفترة $[0^\circ, 360^\circ]$, وذلك بإنشاء جدول قيم للمتغيرين x و y وتمثيل كل زوج بنقطة في المستوى. ويمكن استعمال هذه الطريقة لتمثيل الاقترانين نفسيهما عند قياس الزوايا بالراديان في الفترة $[0, 2\pi]$

مثال (1)

(1) أمثل الاقتران $f(x) = \sin x$ بيانيا في الفترة $[0, 2\pi]$

الحل :-

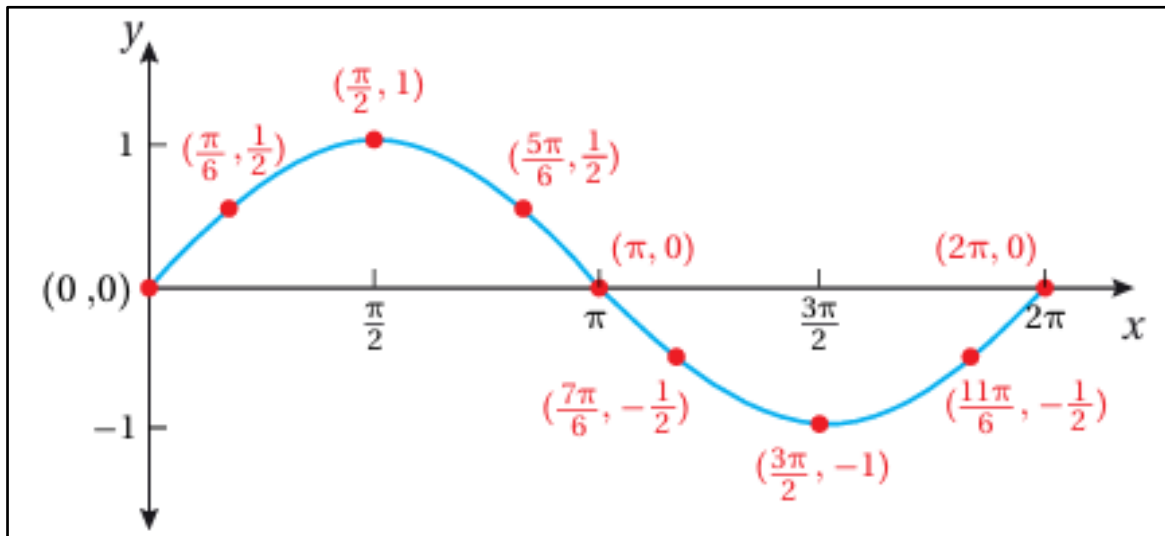
الخطوة (1) :- أنشئ جدولا أكتب فيه زوايا شائعة نسبها المثلثية معروفة , مثل الزوايا الربعية والخاصة

الخطوة (2) :- أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x , ثم أكتبها في الجدول الاتي .

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y = \sin x$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0
(x, y)	(0, 0)	$(\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2})$	$(\pi, 0)$	$(\frac{7\pi}{6}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{11\pi}{6}, -\frac{1}{2})$	$(2\pi, 0)$

الخطوة (3) :- أعين الأزواج المرتبة في المستوى الاحداثي

ثم أصل بينها بمنحنى.



(2) أمثل الاقتران $f(x) = \cos x$ بيانيا في الفترة $[0, 2\pi]$

الحل :-

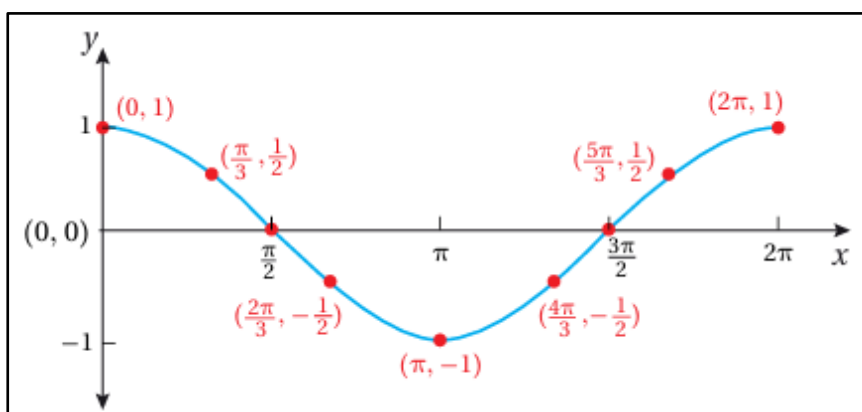
الخطوة (1) :- أنشئ جدولا أكتب فيه زوايا شائعة نسبها المثلثية معروفة , مثل الزوايا الربعية والخاصة

الخطوة (2) :- أجد قيمة $\cos x$ لكل زاوية x , ثم أكتبها في الجدول الاتي .

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
(x, y)	(0, 1)	$(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{2})$	$(\pi, -1)$	$(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{5\pi}{3}, \frac{1}{2})$	$(2\pi, 1)$

الخطوة (3) :- أعين الأزواج المرتبة في المستوى الاحداثي

ثم أصل بينها بمنحنى.



نلاحظ من رسمة منحنى الاقترانين , أن منحنى اقتران جيب التمام هو انسحاب الى اليسار لمنحنى اقتران الجيب بمقدار $\frac{\pi}{2}$

تنويه :- يطلق على كل من نقاط تقاطع الاقتران الجيبي والنقاط العظمى والصغرى اسم النقاط المفتاحية

حيث يجوز الاكتفاء بها لرسم الاقتران الجيبي .

$\sin x = 0$ عندما $x = \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ مضاعفات الـ π

$\cos x = 0$ عندما $x = \dots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ مضاعفات الـ $\frac{\pi}{2}$ الفردية

أتحقق من فهمي

(a) أمثل الاقتران $f(x) = \sin x$ بيانيا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$

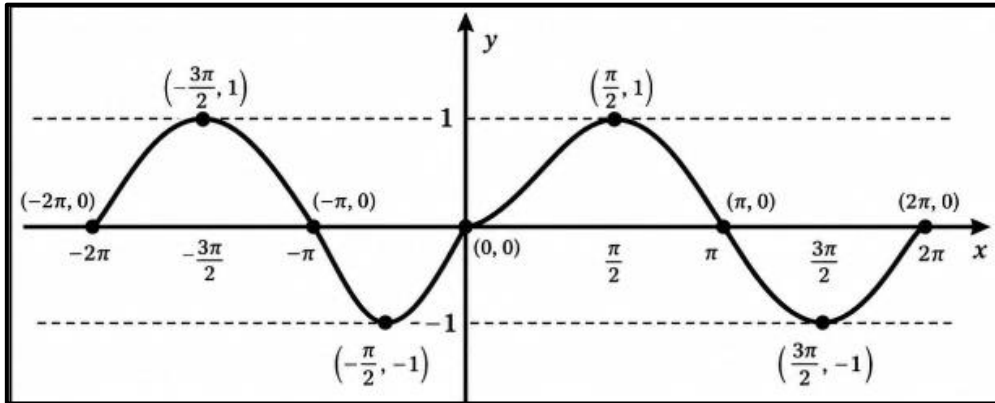
(b) أمثل الاقتران $f(x) = \cos x$ بيانيا في الفترة $[-2\pi, 2\pi]$

الحل :-

(a) أنشئ جدولاً أكتب فيه زوايا شائعة نسبها المثلثية معروفة , مثل الزوايا الربعية والخاصة موجبة وسالبة

ثم أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x , ثم أكتبها في الجدول الآتي , ثم أعين الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي ثم أصل بينها بمنحنى .

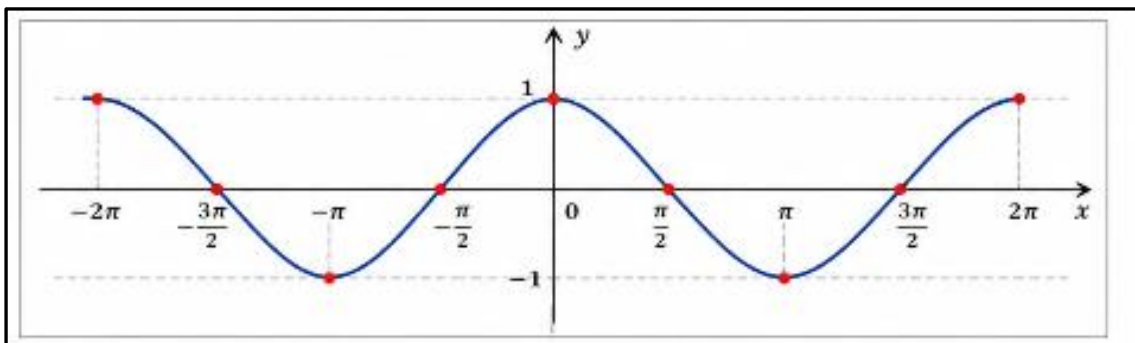
x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0
(x, y)	$(-2\pi, 0)$	$(-\frac{3\pi}{2}, 1)$	$(-\pi, 0)$	$(-\frac{\pi}{2}, -1)$	$(0, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\pi, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(2\pi, 0)$



(b) أنشئ جدولاً أكتب فيه زوايا شائعة نسبها المثلثية معروفة , مثل الزوايا الربعية والخاصة موجبة وسالبة

ثم أجد قيمة $\sin x$ لكل زاوية x , ثم أكتبها في الجدول الآتي , ثم أعين الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي ثم أصل بينها بمنحنى .

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1
(x, y)	$(-2\pi, 1)$	$(-\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(-\pi, -1)$	$(-\frac{\pi}{2}, 0)$	$(0, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\pi, -1)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(2\pi, 1)$



ملاحظة

1) $\sin -x = -\sin x$

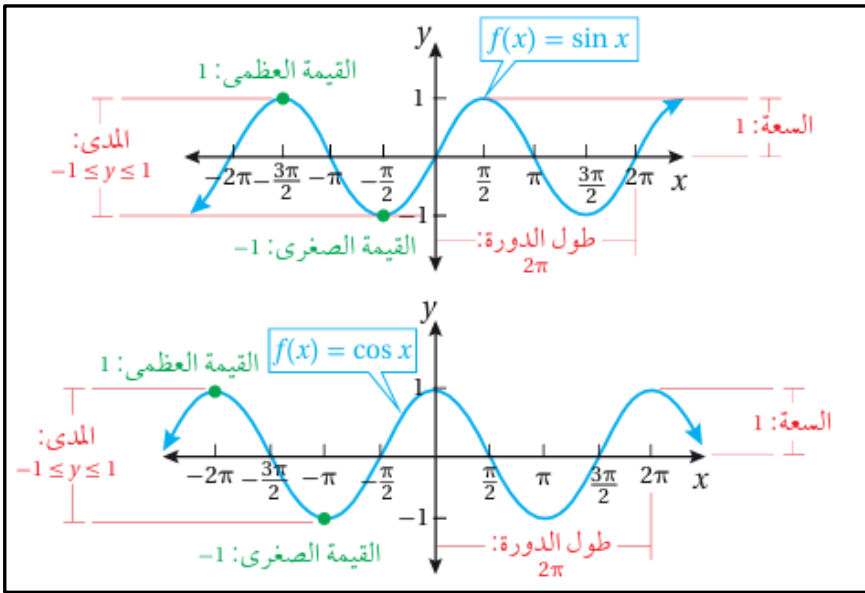
2) $\cos -x = \cos x$

في ما يلي خصائص التمثيل البياني للاقترايين: $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$

- (1) **مجال** كل من الاقترانين هو **مجموعة الأعداد الحقيقية**, لكن ان أعطى فترة يكون المجال هو الفترة
- (2) **مدى** كل من الاقترانين هو الفترة $[-1, 1]$, لذا , فان **القيمة الصغرى لكل منهما -1** والقيمة العظمى لكل منهما 1 , لكن المدى يختلف عند الاقترانات الجيبية (ستشرح لاحقا)
- (3) **سعة** منحنى الاقتران هي نصف الفرق بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى وتساوي (1) لكل من الاقترانين , لأن :-

$$\frac{1}{2} (1 - (-1)) = 1$$

- (4) كل من الاقترانين هو **اقتران دوري** , وهذا يعني أن التمثيل البياني لمنحنى كل منهما له نمط متكرر وأن أقصر جزء متكرر من التمثيل يسمى **الدورة**
- (5) **الطول الأفقي** لكل دورة يسمى **طول الدورة** , والتمثيل البياني للاقترانين يظهر أن طول الدورة هو 2π .



ملاحظات

- (1) **من الرسم** , فان طول الدورة هو المسافة الأفقية بين **قمتين أو قاعين** متتاليين أما السعة فهي المسافة الرأسية بين القمة والقاع مقسوم على 2 , لاحقا توجد قوانين لايجادها بطريقة أسهل.
- (2) سنستخدم خصائص الاقتران $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ لرسم **الاقترانات الجيبية** تحت تأثير **تحويل هندسي** أو أكثر.
- ملاحظة هامة :-** نلاحظ من رسمة الاقترانات الجيبية أن بين كل نقطتين متتاليتين على محور x (عند التقاطع) يوجد قمة أو قاع , حيث عند اقتران الجيب أول تقاطعين قمة وأول تقاطعين في اقتران جيب التمام قاع وهذه الملاحظة ستسهل طريقة الرسم تحت تأثير **تحويلات هندسية**.

الاقتارات الجيبية

هي اقترانات الجيب وجيب التمام الناتجة من تحويل هندسي أو أكثر لمنحنى الاقترانين الرئيسيين

$$f(x) = \cos x , g(x) = \sin x$$

بوجه عام

الصورة العامة للاقتارات الجيبية هي :

$$g(x) = a \sin(bx - c) + d , \quad g(x) = a \cos(bx - c) + d$$

حيث a, b, c, d أعداد حقيقية , و a و b لا يساويان صفرا.

رسم الاقترانات الجيبية

سنتعلم طريقة رسم الاقترانات الجيبية تحت تأثير تحويل هندسي أو أكثر معتمدا على خصائص

$$f(x) = \cos x , g(x) = \sin x$$

أولا :- التمدد الرأسى للاقتارات الجيبية

إذا كان $|a| > 1$, فإن المعامل a في الاقترانين : $g(x) = a \sin x , g(x) = a \cos x$

يؤدي الى توسيع رأسي لمنحنى $f(x) = \sin x , g(x) = \cos x$.

وإذا كان $|a| < 1$ فإن المعامل a يؤدي الى تضيق رأسي للمنحنين

هنا a تؤثر في سعة الاقترانات الجيبية

سعة الاقترانات الجيبية

مفهوم أساسي

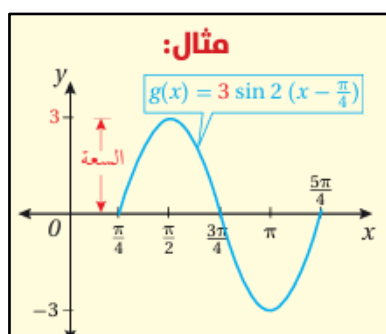
بالكلمات : سعة منحنى الاقتران الجيبى هو نصف المسافة بين قيمتيه العظمى والصغرى أو نصف ارتفاع الموجة

بالرموز : سعة كل من : $g(x) = a \sin(bx - c) + d$

$$g(x) = a \cos(bx - c) + d$$

هو $|a|$

بالمختصر : السعة هي معامل الاقتران الجيبى.



خطوات رسم منحنى الاقتران الجيبى $g(x) = a \sin x$, $g(x) = a \cos x$

- (1) نحدد نوع التوسع من خلال قيمة a
- (2) نحدد نقاط التقاطع لمنحنى الاقتران الرئيس مع محور x والعظمى والصغرى (النقاط المفتاحية) حيث :-
 اقتران الجيب :- $(0, 0), (\frac{\pi}{2}, 1), (\pi, 0), (\frac{3\pi}{2}, -1), (2\pi, 0)$
 اقتران جيب التمام :- $(0, 1), (\frac{\pi}{2}, 0), (\pi, -1), (\frac{3\pi}{2}, 0), (2\pi, 1)$
- (3) أضرب فقط الاحداثي y بـ $|a|$
- (4) نعين النقاط الجديدة ونصل بينها بشكل موجه تمر بجميع النقاط.

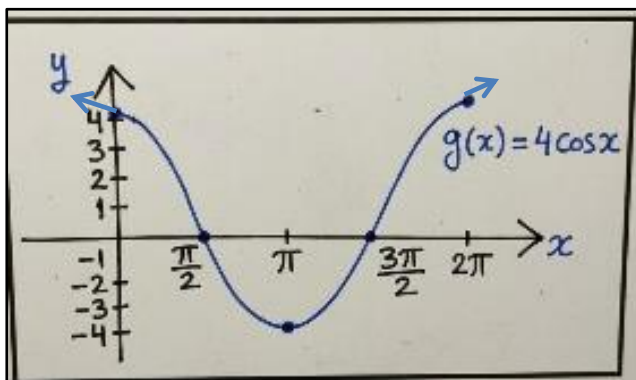
مثال (2) أمثل منحنى كل اقتران مما يأتي بيانيا

1) $g(x) = 4 \cos x$

الحل :-

بما أن سعة الاقتران $g(x)$ $|a| = 4 > 1$ هنا منحنى $g(x) = 4 \cos x$ توسيع رأسي للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$ بمعامل مقداره 4

نضرب الاحداثي y للنقاط المفتاحية للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$ بالعدد 4 ثم نمثل الاقتران $g(x)$ اعتمادا على النقاط الجديدة



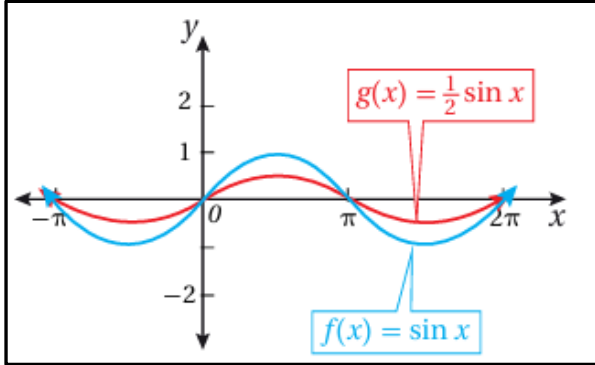
النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0, 1 \times 4) = (0, 4)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, 0 \times 4) = (\frac{\pi}{2}, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi, -1 \times 4) = (\pi, -4)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0 \times 4) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi, 1 \times 4) = (2\pi, 4)$

لاحظ أن المسافة بين كل تقاطعين متتاليين يساوي نصف دورة

$$2) g(x) = \frac{1}{2} \sin x$$

الحل :- بما أن سعة الاقتران $g(x)$ $|a| = \frac{1}{2} < 1$ هنا منحنى $g(x) = \frac{1}{2} \sin x$ تضيق رأسي للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بمعامل مقداره $\frac{1}{2}$

نضرب الاحداثي y للنقاط المفتاحية للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بالعدد $\frac{1}{2}$ ثم نمثل الاقتران $g(x)$ اعتمادا على النقاط الجديدة



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0, 0 \times \frac{1}{2}) = (0, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1 \times \frac{1}{2}) = (\frac{\pi}{2}, \frac{1}{2})$
$(\pi, 0)$	$(\pi, 0 \times \frac{1}{2}) = (\pi, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1 \times \frac{1}{2}) = (\frac{3\pi}{2}, -\frac{1}{2})$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 0 \times \frac{1}{2}) = (2\pi, 0)$

أتحقق من فهمي

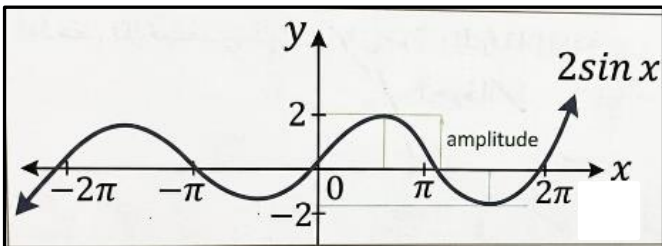
أمثل منحنى كل اقتران مما يأتي بيانيا :-

$$a) g(x) = 2 \sin x$$

الحل :-

بما أن سعة الاقتران $g(x)$ $|a| = 2 > 1$ هنا منحنى $g(x) = 2 \sin x$ توسيع رأسي للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بمعامل مقداره 2

نضرب الاحداثي y للنقاط المفتاحية للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بالعدد 2 ثم نمثل الاقتران $g(x)$ اعتمادا على النقاط الجديدة

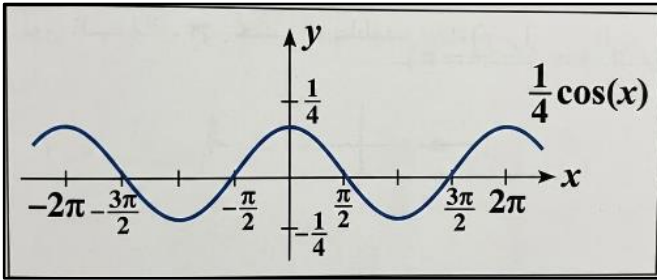


النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0, 0 \times 2) = (0, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1 \times 2) = (\frac{\pi}{2}, 2)$
$(\pi, 0)$	$(\pi, 0 \times 2) = (\pi, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1 \times 2) = (\frac{3\pi}{2}, -2)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 0 \times 2) = (2\pi, 0)$

b) $g(x) = \frac{1}{4} \cos x$

الحل : بما أن سعة الاقتران $g(x)$ هنا منحني $g(x) = \frac{1}{4} \cos x$ تضيق رأسي $|a| = \frac{1}{4} < 1$ للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$ بمعامل مقداره $\frac{1}{4}$

نضرب الاحداثي y للنقاط المفتاحية للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$ بالعدد $\frac{1}{4}$ ثم نمثل الاقتران $g(x)$ اعتمادا على النقاط الجديدة



النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0, 1 \times \frac{1}{4}) = (0, \frac{1}{4})$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, 0 \times \frac{1}{4}) = (\frac{\pi}{2}, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi, -1 \times \frac{1}{4}) = (\pi, -\frac{1}{4})$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0 \times \frac{1}{4}) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi, 1 \times \frac{1}{4}) = (2\pi, \frac{1}{4})$

ثانيا :- التمدد الأفقي للاقترانات الجيبية

إذا كان $|b| < 1$, فإن المعامل b في الاقترانين $g(x) = \sin bx$, $g(x) = \cos bx$

يؤدي الى **توسيع أفقي** لمنحني $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$ بمقدار $\frac{1}{b}$

وإذا كان $|b| > 1$ فإن المعامل b يؤدي الى **تضييق أفقي** بمقدار $\frac{1}{b}$

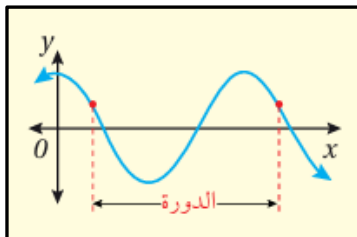
ملاحظة :- هنا b تؤثر في طول دورة الاقترانات الجيبية

طول دورة الاقترانات الجيبية

مفهوم أساسي

بالكلمات : طول دورة الاقتران الجيبية هو طول أقصر فترة على المحور الأفقي يكرر بعدها المنحني نفسه بالهيئة نفسها .

بالرموز : طول دورة كل من $g(x) = a \sin(bx - c) + d$, $g(x) = a \cos(bx - c) + d$



هو $\frac{2\pi}{|b|}$

حيث b هو معامل الزاوية.

خطوات رسم منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = \sin bx$, $q(x) = \cos bx$

(1) أحدد طول دورة الاقتران .

(2) نقوم بضرب الاحداثي x لنقاط المفتاحية بـ $\frac{1}{b}$ (يجوز الاكتفاء فقط بنقاط التقاطع مع محور x)

(3) نعين النقاط الجديدة ونصل بينها بشكل موجه تمر بجميع النقاط.

مثال (3)

أمثل منحنى كل اقتران مما يأتي بيانيا

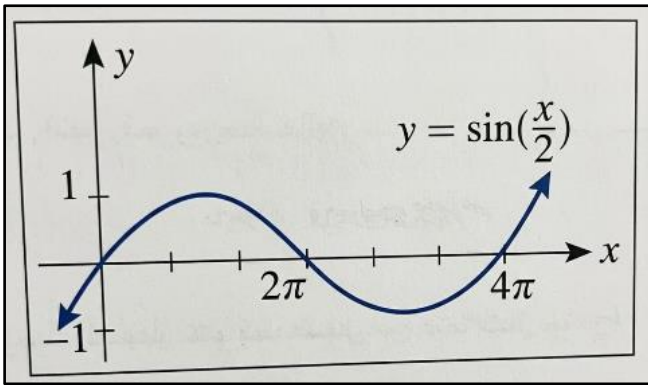
1) $g(x) = \sin \frac{x}{2}$

الحل :-

بما أن $1 < \frac{1}{2} = \left| \frac{1}{2} \right| = |b|$ في هذه الحالة **توسيع أفقي** بمقدار 2

$$\text{طول الدورة :- } \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{2} \right|} = 4\pi$$

نقوم بضرب الاحداثي x للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بـ $\frac{1}{b}$ وهي $\frac{1}{2}$ وهي $2 = \frac{1}{\frac{1}{2}}$



النقاط المفتاحية	التعديل
(0 , 0)	(0 × 2 , 0) = (0 , 0)
($\frac{\pi}{2}$, 1)	($\frac{\pi}{2} \times 2$, 1) = (π , 1)
(π , 0)	($\pi \times 2$, 0) = (2π , 0)
($\frac{3\pi}{2}$, -1)	($\frac{3\pi}{2} \times 2$, -1) = (3π , -1)
(2π , 0)	($2\pi \times 2$, 0) = (4π , 0)

ملاحظة :- المسافة بين كل تقاطعين متتاليين على محور x هو **نصف دورة** , وهذه الملاحظة تساعد في معرفة

طول الدورة في حالة اعطاء رسمة جاهزة.

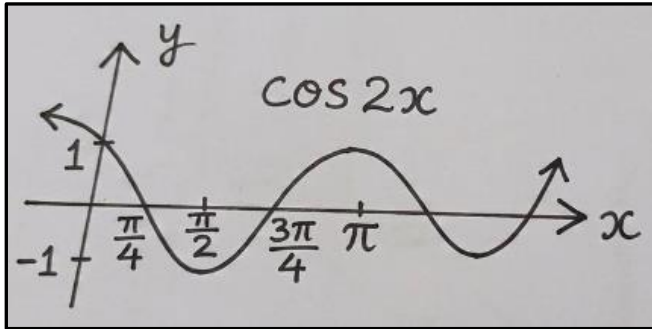
تنويه : يجوز الاكتفاء فقط بنقاط التقاطع على محور x

2) $g(x) = \cos 2x$

الحل :- بما أن $|b| = |2| = 2 > 1$ في هذه الحالة **تضييق أفقي** بمقدار $\frac{1}{2}$

طول الدورة :- $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

نقوم بضرب الاحداثي x للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$ بـ $\frac{1}{b}$ وهي $\frac{1}{2}$



النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0 \times \frac{1}{2}, 1) = (0, 1)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2}, 0) = (\frac{\pi}{4}, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi \times \frac{1}{2}, -1) = (\frac{\pi}{2}, -1)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{2}, 0) = (\frac{3\pi}{4}, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi \times \frac{1}{2}, 1) = (\pi, 1)$

أتحقق من فهمي

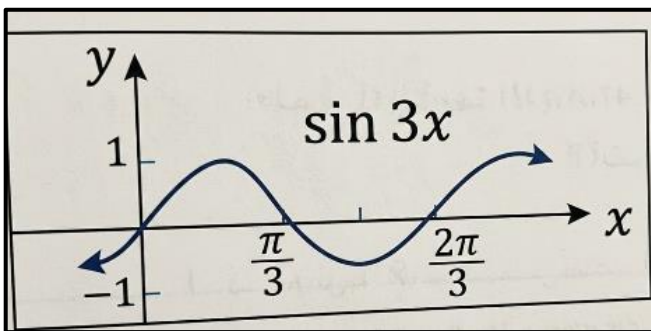
أمثل منحنى كل اقتران مما يأتي ببيان

a) $g(x) = \sin 3x$

الحل :- بما أن $|b| = |3| = 3 > 1$ في هذه الحالة **تضييق أفقي** بمقداره $\frac{1}{3}$

طول الدورة :- $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|3|} = \frac{2\pi}{3}$

نقوم بضرب الاحداثي x للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بـ $\frac{1}{b}$ وهي $\frac{1}{3}$



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 \times \frac{1}{3}, 0) = (0, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3}, 1) = (\frac{\pi}{6}, 1)$
$(\pi, 0)$	$(\pi \times \frac{1}{3}, 0) = (\frac{\pi}{3}, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{3}, -1) = (\frac{\pi}{2}, -1)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi \times \frac{1}{3}, 0) = (\frac{2\pi}{3}, 0)$

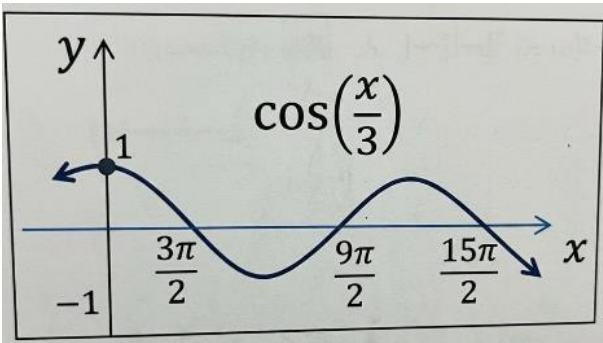
b) $g(x) = \cos \frac{x}{3}$

الحل :-

بما أن $|b| = \left| \frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} < 1$ في هذه الحالة **توسيع أفقي** مقداره 3

طول الدورة :- $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{3} \right|} = 6\pi$

نقوم بضرب الاحداثي x للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$ بـ $\frac{1}{b}$ وهي $\frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$



النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0 \times 3, 1) = (0, 1)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} \times 3, 0) = (\frac{3\pi}{2}, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi \times 3, -1) = (3\pi, -1)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} \times 3, 0) = (\frac{9\pi}{2}, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi \times 3, 1) = (6\pi, 1)$

ثالثا :- الانسحاب الرأسى للاقتانات الجيبية

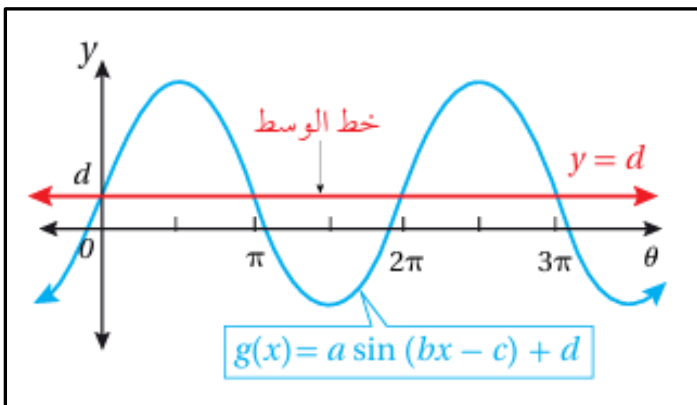
درسنا سابقا أن منحنى الاقتران $g(x) = f(x) + c$, $c > 0$ هو منحنى الاقتران $f(x)$ **مزاحا c وحدة الى الأعلى**, وأن منحنى $g(x) = f(x) - c$ هو منحنى الاقتران $f(x)$ **مزاحا c وحدة الى أسفل**

وهذه القاعدة تنطبق على الاقترانات الجيبية.

كما نعلم أن منحنيا الاقترانين الرئيسين يتذبذب كل منهما حول المحور x

لكن عن اجراء انسحاب رأسى للاقتران الجيبى

فان منحناه يتذبذب حول محور جديد يسمى **خط الوسط**



بوجه عام

خط الوسط لمنحنى الاقتران الجيبى $g(x) = a \sin(bx - c) + d$, $g(x) = a \cos(bx - c) + d$

هو $y = d$

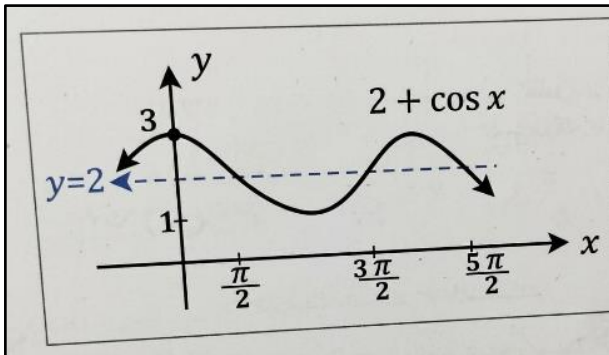
خطوات رسم منحنى الاقتران الجيبي $g(x) = \cos x + d$, $g(x) = \sin x + d$

- (1) نجد معادلة خط الوسط $y = d$ ونرسمه .
- (2) نقوم **بإضافة** d للإحداثي y للنقاط المفتاحية (يجوز الاكتفاء فقط بنقاط التقاطع مع محور x)
- (3) نعين النقاط الجديدة ونصل بينها بشكل موجه تمر بجميع النقاط.

مثال (4)

أمثل منحنى الاقتران $g(x) = 2 + \cos x$ بيانياً.

الحل :- معادلة خط الوسط $y = 2$, وعليه منحنى $g(x)$ مزاحاً لأعلى للاقتران الرئيس بمقدار وحدتان.
نضيف 2 للإحداثي y للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$



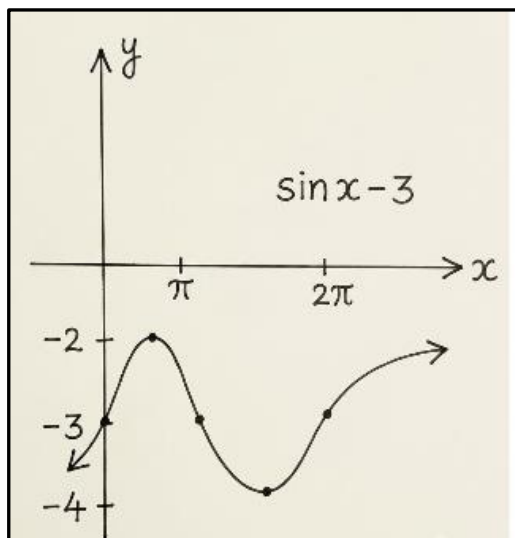
النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0, 1+2) = (0, 3)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, 0+2) = (\frac{\pi}{2}, 2)$
$(\pi, -1)$	$(\pi, -1+2) = (\pi, 1)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0+2) = (\frac{3\pi}{2}, 2)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi, 1+2) = (2\pi, 3)$

أتحقق من فهمي

أمثل منحنى الاقتران $g(x) = \sin x - 3$ بيانياً.

الحل :- معادلة خط الوسط $y = -3$ وعليه منحنى $g(x)$ مزاحاً لأسفل للاقتران الرئيس بمقدار (3) وحدات.

نطرح 3 من الإحداثي y للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0, 0-3) = (0, -3)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1-3) = (\frac{\pi}{2}, -2)$
$(\pi, 0)$	$(\pi, 0-3) = (\pi, -3)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1-3) = (\frac{3\pi}{2}, -4)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 0-3) = (2\pi, -3)$

رابعاً :- الانسحاب الأفقي للاقتربات الجيبية

درسنا سابقاً أن منحنى الاقتربان $g(x) = f(x+c)$, $c > 0$ هو منحنى الاقتربان $f(x)$ مزاحاً c وحدة إلى اليسار وأن منحنى الاقتربان $g(x) = f(x-c)$ هو منحنى الاقتربان $f(x)$ مزاحاً c وحدة إلى اليمين .
وهذه القاعدة تنطبق على الاقتربات الجيبية.

خطوات رسم منحنى الاقتربان الجيبى $g(x) = \cos(x+c)$, $g(x) = \sin(x+c)$

(1) في حالة الازاحة لليمين نضيف مقدار الازاحة للاحداثي x للنقاط المفتاحية للاقتربان الرئيس أما الازاحة لليسار هنا نطرح مقدار الازاحة من الاحداثي x

(2) نعين النقاط الجديدة ونصل بينها بشكل موجه تمر بجميع النقاط.

توضيح :- لمعرفة الازاحة , نساوي الزاوية بالصفر ونجد قيمة x , اذا كانت موجب تكون الازاحة لليمين أما سالب تكون الازاحة لليسار

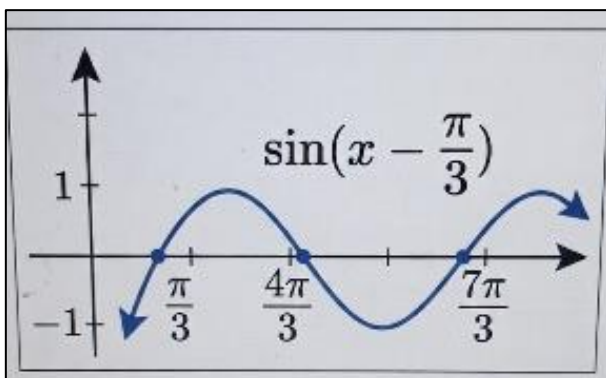
مثال (5)

أمثل منحنى الاقتربان $g(x) = \sin(x - \frac{\pi}{3})$ بيانياً.

الحل :-

منحنى الاقتربان $g(x)$ هو منحنى $f(x) = \sin x$ مزاحاً $\frac{\pi}{3}$ وحدة إلى اليمين , حيث نضيف $\frac{\pi}{3}$

إلى الاحداثي x للنقاط المفتاحية .



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 + \frac{\pi}{3}, 0) = (\frac{\pi}{3}, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, 1) = (\frac{5\pi}{6}, 1)$
$(\pi, 0)$	$(\pi + \frac{\pi}{3}, 0) = (\frac{4\pi}{3}, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, -1) = (\frac{11\pi}{6}, -1)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi + \frac{\pi}{3}, 0) = (\frac{7\pi}{3}, 0)$

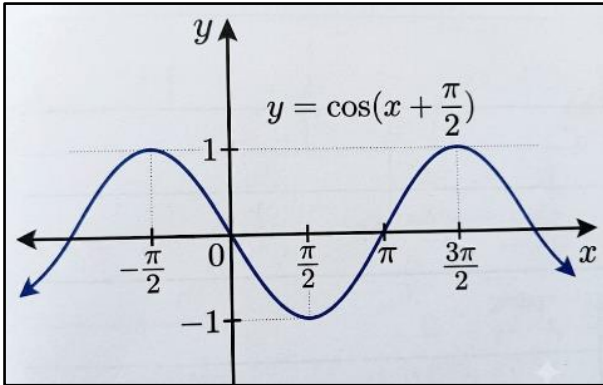
أتحقق من فهمي

أمثل منحنى الاقتران $g(x) = \cos(x + \frac{\pi}{2})$ بيانيا.

الحل :-

منحنى الاقتران $g(x)$ هو منحنى $f(x) = \cos x$ مزاحا $\frac{\pi}{2}$ وحدة الى اليسار , حيث نطرح $\frac{\pi}{2}$

من الاحداثي x للنقاط المفتاحية.

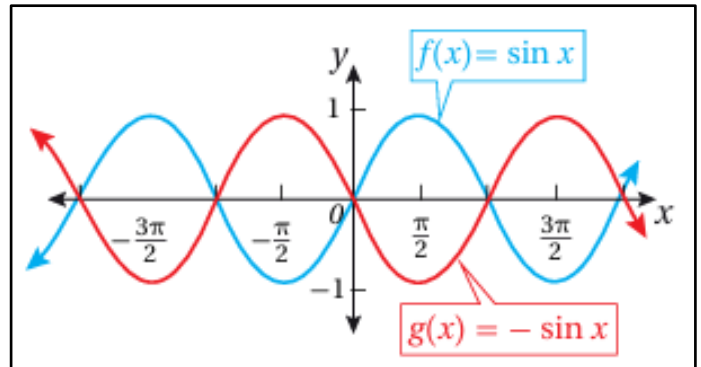
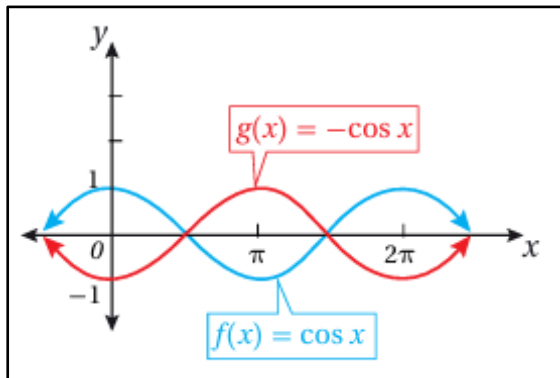


النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0 - \frac{\pi}{2}, 1) = (-\frac{\pi}{2}, 1)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, 0) = (0, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi - \frac{\pi}{2}, -1) = (\frac{\pi}{2}, -1)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}, 0) = (\pi, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi - \frac{\pi}{2}, 1) = (\frac{3\pi}{2}, 1)$

انعكاس الاقترانات الجيبية

في الامثلة السابقة تعلمنا تمثيل الاقترانات الجيبية عندما $a > 0$

ولمعرفة تأثير قيمة a عندما تكون سالبة , تأمل التمثيل البياني الاتي:-



نلاحظ أن منحنى الاقتران $g(x) = -\sin x$ هو انعكاس لمنحنى الاقتران $f(x) = \sin x$ حول المحور x

وأن منحنى $g(x) = -\cos x$ هو أيضا انعكاس لمنحنى الاقتران $f(x) = \cos x$ حول محور x

عندما تكون $a < 0$ فان منحنى الاقتران $g(x) = a \sin(bx - c) + d$ ومنحنى الاقتران

$g(x) = a \cos(bx - c) + d$ يكونان انعكاسا لمنحنى الاقتران :-

$g(x) = |a| \sin(bx - c) + d$ ومنحنى الاقتران $g(x) = |a| \cos(bx - c) + d$

على الترتيب حول خط الوسط $y = d$

بالمختصر :- تتغير اشارة الاحداثي y فقط.

مثال (6)

أجد السعة وطول الدورة ومعادلة خط الوسط للاقتران $g(x) = \frac{-1}{2} \cos(x - \frac{3\pi}{2}) + 1$

ثم أمثله بيانيا.

الحل :-

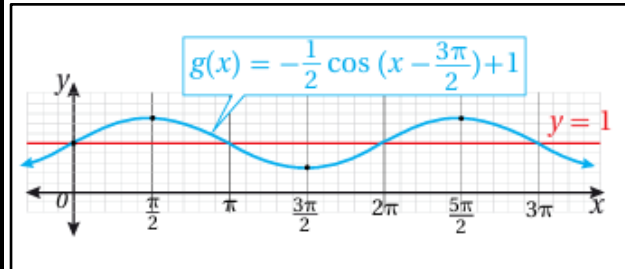
$$a = \frac{-1}{2} , b = 1 , c = \frac{3\pi}{2} , d = 1$$

السعة : $|a| = \left| \frac{-1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$, معادلة خط الوسط $y = 1$

لرسم الاقتران نلاحظ وجود أكثر من تحويل هندسي (ازاحة أفقية ورأسية وانعكاس وتمدد رأسي)

نلاحظ وجود انعكاس هنا نغير اشارة y ثم نضربها في $\frac{1}{2}$ لوجود تضيق رأسي ثم نضيف 1

لوجود ازاحة رأسية أما الاحداثي x نضيف له $\frac{3\pi}{2}$ لوجود ازاحة أفقية , معامل الزاوية (1) وعليه لا يوجد تمدد أفقي.



النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0 + \frac{3\pi}{2}, -1 \times \frac{1}{2} + 1) = (\frac{3\pi}{2}, \frac{1}{2})$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}, 0 \times \frac{1}{2} + 1) = (2\pi, 1)$
$(\pi, -1)$	$(\pi + \frac{3\pi}{2}, 1 \times \frac{1}{2} + 1) = (\frac{5\pi}{2}, \frac{3}{2})$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}, 0 \times \frac{1}{2} + 1) = (3\pi, 1)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi + \frac{3\pi}{2}, -1 \times \frac{1}{2} + 1) = (\frac{7\pi}{2}, \frac{1}{2})$

أتحقق من فهمي

أجد السعة وطول الدورة ومعادلة خط الوسط للاقتران $g(x) = -2 \sin(x - \pi) - 3$ ثم أمثله بيانياً.

الحل :-

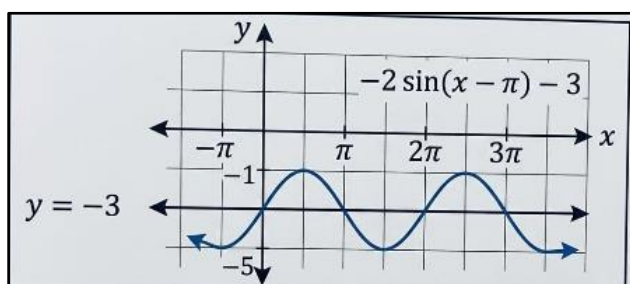
$$a = -2, b = 1, c = \pi, d = -3$$

السعة : 2 , $|a| = |-2| = 2$, طول الدورة : 2π , $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$, معادلة خط الوسط $y = -3$

لرسم الاقتران نلاحظ وجود أكثر من تحويل هندسي (ازاحة أفقية ورأسية وانعكاس وتمدد رأسي)

نلاحظ وجود انعكاس هنا نغير إشارة y ثم نضربها في 2 لوجود توسيع رأسي ثم نطرح 3 لوجود ازاحة رأسية للأسفل أما الاحداثي x نضيف له π لوجود ازاحة أفقية.

النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 + \pi, 0 - 3) = (\pi, -3)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} + \pi, -1 \times 2 - 3) = (\frac{3\pi}{2}, -5)$
$(\pi, 0)$	$(\pi + \pi, 0 - 3) = (2\pi, -3)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} + \pi, 1 \times 2 - 3) = (\frac{5\pi}{2}, -1)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi + \pi, 0 - 3) = (3\pi, -3)$



ملاحظات هامة :-

(1) $Max = |a| + d$, $Min = -|a| + d$ وهي تمثل أقصى قيمة وأقل قيمة لاقترانات الجيوب

وهي تفيدنا في إيجاد المدى , حيث يكون داخل فترة مغلقة يبدأ من الاقل وينتهي بالأكبر

(2) معادلة خط الوسط من الرسم :- نجمع الاحداثي y لنقطة القمة والقاع ونقسم على 2

(3) لمعرفة الدورة من الرسم في حالة عدم اعطاء قاعين أو قمتين متتاليتين , هو إيجاد البعد بين تقاطعين متتاليين على محور x وهو يمثل نصف فترة.

أتدرب وأحل المسائل

أجد طول الدورة والسعة (ان وجدت) لكل اقتران مما يأتي , ثم أمثله بيانياً.

1) $g(x) = 3\sin x$

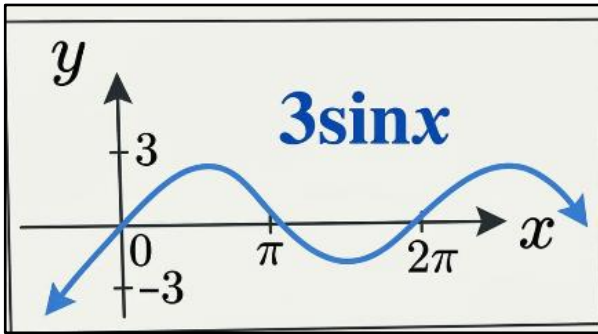
$a = 3$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 0$

الحل :-

السعة : $|a| = |3| = 3$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

بما أن سعة الاقتران $g(x) = 3\sin x$ هنا منحني $|a| = 3 > 1$ توسيع رأسي للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بمعامل مقداره 3

نضرب الاحداثي y للنقاط المفتاحية للاقتران الرئيس $f(x) = \sin x$ بالعدد 3



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0, 0 \times 3) = (0, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1 \times 3) = (\frac{\pi}{2}, 3)$
$(\pi, 0)$	$(\pi, 0 \times 3) = (\pi, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1 \times 3) = (\frac{3\pi}{2}, -3)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 0 \times 3) = (2\pi, 0)$

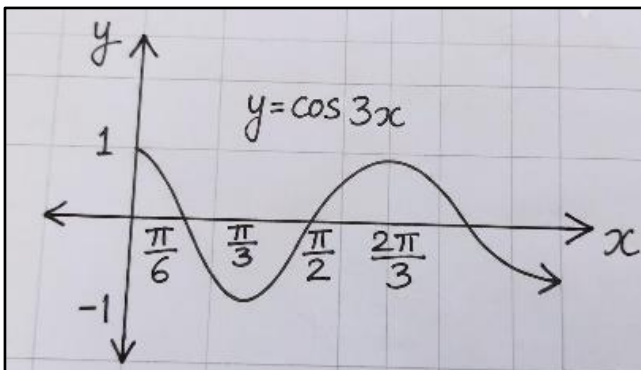
2) $g(x) = \cos 3x$

الحل :- $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$, $d = 0$

السعة : $|a| = |1| = 1$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$

بما أن $|b| = |3| = 3 > 1$ في هذه الحالة تضيق أفقي بمقدار $\frac{1}{3}$

نقوم بضرب الاحداثي x للاقتران الرئيس $f(x) = \cos x$ بـ $\frac{1}{b}$ وهي $\frac{1}{3}$



النقاط المفتاحية	التعديل (الجديدة)
$(0, 1)$	$(0 \times \frac{1}{3}, 1) = (0, 1)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3}, 0) = (\frac{\pi}{6}, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi \times \frac{1}{3}, -1) = (\frac{\pi}{3}, -1)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{3}, 0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi \times \frac{1}{3}, 1) = (\frac{2\pi}{3}, 1)$

3) $g(x) = 2 - \cos x$

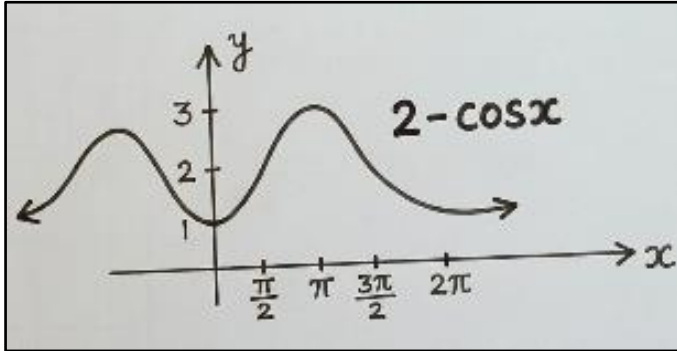
(ازاحة رأسية وانعكاس)

الحل :-

$a = -1$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 2$

السعة : $|a| = |-1| = 1$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

نلاحظ وجود انعكاس لان معامل a سالب , هنا نغير اشارة y ثم نضيف 2 لوجود ازاحة رأسية لأعلى



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 1)$	$(0, -1 + 2) = (0, 1)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, 0 + 2) = (\frac{\pi}{2}, 2)$
$(\pi, -1)$	$(\pi, 1 + 2) = (\pi, 3)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0 + 2) = (\frac{3\pi}{2}, 2)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi, -1 + 2) = (2\pi, 1)$

4) $g(x) = 1 + \frac{1}{2} \cos \pi x$

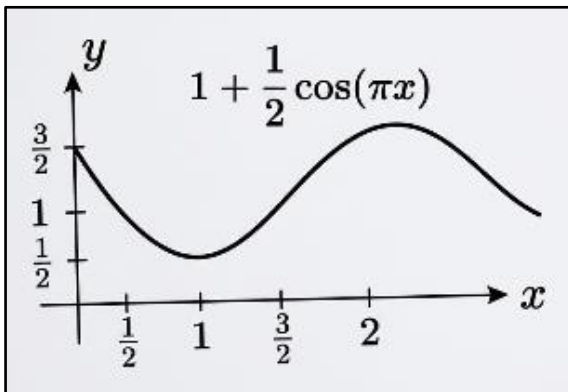
(ازاحة رأسية وتمدد رأسي وأفقي)

الحل :-

$a = \frac{1}{2}$, $b = \pi$, $c = 0$, $d = 1$

السعة : $|a| = |\frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

نضرب الاحداثي y بالعدد $\frac{1}{2}$ ثم نضيف (1) ثم نضرب الاحداثي x بالعدد $\frac{1}{\pi}$



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 1)$	$(0 \times \frac{1}{\pi}, 1 \times \frac{1}{2} + 1) = (0, \frac{3}{2})$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\pi}, 0 + 1) = (\frac{1}{2}, 1)$
$(\pi, -1)$	$(\pi \times \frac{1}{\pi}, -1 \times \frac{1}{2} + 1) = (1, \frac{1}{2})$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{\pi}, 0 + 1) = (\frac{3}{2}, 1)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi \times \frac{1}{\pi}, 1 \times \frac{1}{2} + 1) = (2, \frac{3}{2})$

5) $g(x) = 3 + 2\sin 3(x + \pi)$

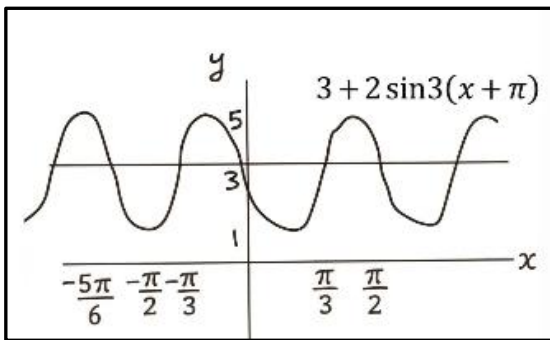
الحل :- $a = 2$, $b = 3$, $c = -3\pi$, $d = 3$

السعة : $|a| = |2| = 2$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{3}$, معادلة خط الوسط $y = 3$

نضرب الاحداثي y في 2 ثم نضيف 3 أما الاحداثي x نضرب في $\frac{1}{3}$ ثم نطرح π

ملاحظة حول الازاحة الافقية عندما يكون معامل x للزاوية ليس (1)

نقوم بمساواة الزاوية بالصفر ونجد قيمة x بحيث ان كانت موجب يكون هناك ازاحة لليمين أما سالب يكون هناك ازاحة لليسار .



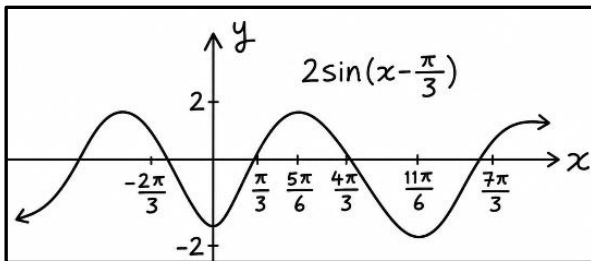
النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 - \pi, 0 + 3) = (-\pi, 3)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{3} - \pi, 1 \times 2 + 3) = (\frac{-5\pi}{6}, 5)$
$(\pi, 0)$	$(\pi \times \frac{1}{3} - \pi, 0 + 3) = (\frac{-2\pi}{3}, 3)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{3} - \pi, -1 \times 2 + 3) = (\frac{-\pi}{2}, 1)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi \times \frac{1}{3} - \pi, 0 + 3) = (\frac{-\pi}{3}, 3)$

6) $g(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{3})$

الحل :- $a = 2$, $b = 1$, $c = \frac{\pi}{3}$, $d = 0$

السعة : $|a| = |2| = 2$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = 2\pi$, معادلة خط الوسط $y = 0$

نضرب الاحداثي y في 2 ثم نضيف $\frac{\pi}{3}$ للإحداثي x



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 + \frac{\pi}{3}, 0 \times 2) = (\frac{\pi}{3}, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, 1 \times 2) = (\frac{5\pi}{6}, 2)$
$(\pi, 0)$	$(\pi + \frac{\pi}{3}, 0 \times 2) = (\frac{4\pi}{3}, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3}, -1 \times 2) = (\frac{11\pi}{6}, -2)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi + \frac{\pi}{3}, 0 \times 2) = (\frac{7\pi}{3}, 0)$

أكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز التمثيل البياني المناسب له من بين التمثيلات البيانية (a – f)

7) $g(x) = -2 + \sin(2x + \pi)$

8) $g(x) = -\sin(x + \pi)$

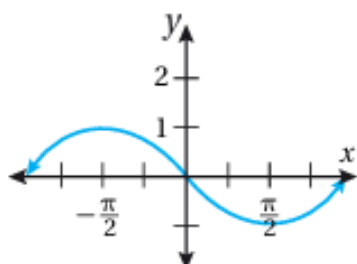
9) $g(x) = -3 + \cos x$

10) $g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

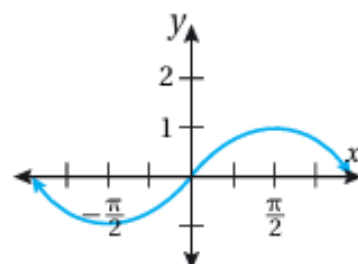
11) $g(x) = 1 + \sin\frac{1}{2}x$

12) $g(x) = 1 + 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}\right)$

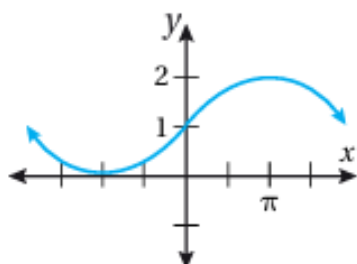
a)



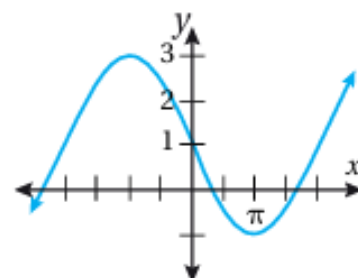
b)



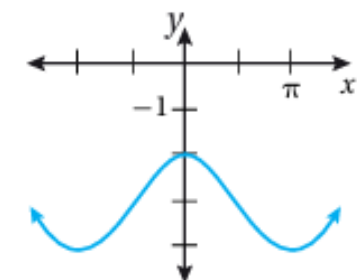
c)



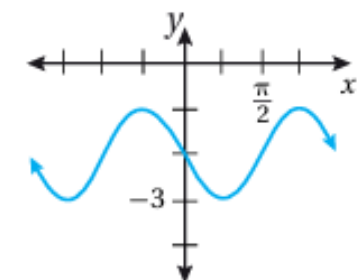
d)



e)



f)



الحل :-

7) f

8) b

9) e

10) a

11) c

12) d

نستفيد من السعة والازاحات لمعرفة المنحنيات.

أصف التحويلات الهندسية التي طبقت على منحنى الاقتران $f(x)$ لينتج منحنى $g(x)$ في كل مما يأتي :-

$$13) f(x) = 2\cos x, \quad g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$$

ملاحظة :-

معامل x للزاوية ان اختلف يكون هناك تمدد أفقي , لكن ان اختلفت الزاوية يكون هناك ازاحة أفقية لليمين أو اليسار ولتحديدها , نقوم بمساواة الزاوية بالصفر ونجد قيمة x بحيث ان كانت موجب يكون هناك ازاحة لليمين أما سالب يكون هناك ازاحة لليساار .

الحل :-

$$x - \frac{\pi}{2} = 0 \longrightarrow x = \frac{\pi}{2}$$

التحويلات :- ازاحة أفقية الى اليمين ومقدارها $\frac{\pi}{2}$ وازاحة رأسية الى الأعلى بمقدار وحدة واحدة .

$$14) f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right), \quad g(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$$

الحل :-

نلاحظ أن الزاوية نفسها , وعليه لا يوجد ازاحة أفقية و تمدد أفقي

التحويلات :- توسيع رأسي بمقدار (3) وحدات لان $|a| > 1$ وازاحة رأسية للأسفل بمقدار (2) وحدة .

$$15) f(x) = \sin 3x, \quad g(x) = \sin 3(x + 3\pi) - 5$$

الحل :-

$$g(x) = \sin(3x + 9\pi) - 5 \quad : \text{نعيد كتابة الاقتران } g(x) \text{ وعليه :}$$

هنا معامل x نفسه , لكن الزاوية ليست نفسها وعليه يوجد ازاحة أفقية

$$3x + 9\pi = 0 \longrightarrow x = -3\pi$$

التحويلات :- ازاحة أفقية الى اليسار ومقدارها 3π وازاحة رأسية نحو الأسفل بمقدار (5) وحدات

16) $f(x) = \cos x + 9$, $g(x) = \cos 6(x - \pi) + 9$

الحل :-

الحل :- نعيد كتابة الاقتران $g(x)$ وعليه : $g(x) = \cos(6x - 6\pi) + 9$

هنا معامل x مختلف وعليه يوجد ازاحة أفقية وتمدد أفقي

$$6x - 6\pi = 0 \longrightarrow x = \pi$$

التحويلات :- ازاحة أفقية نحو اليمين مقدارها π وتضييق أفقي بمقدار $\frac{1}{6}$

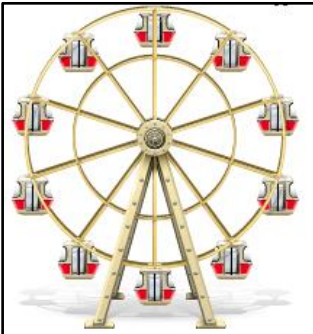
تمثل المعادلة : $h = 25 \sin \frac{\pi}{15}(t - 7.5) + 30$ الارتفاع عن سطح الأرض بالأقدام

لشخص يركب في عجلة دوارة , حيث t الزمن بالثواني.

(17) أمثل منحنى معادلة ارتفاع الشخص مع الزمن بيانيا.

(18) ما أقصى ارتفاع للشخص وأدنى ارتفاع له عن سطح الأرض.

الحل :-



$$h = 25 \sin\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 30$$

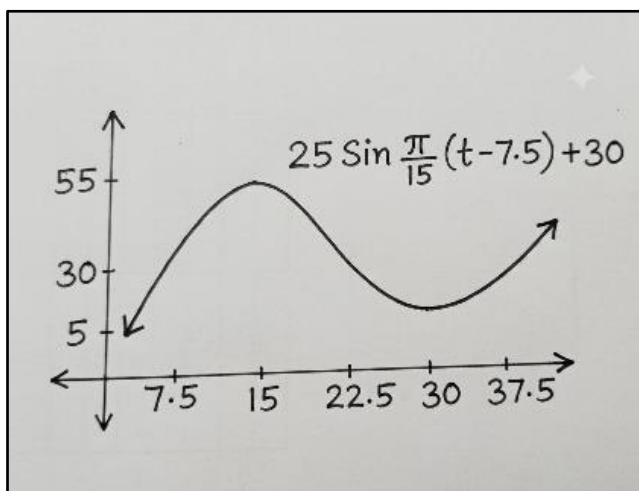
(تمدد رأسي وتمدد أفقي و انسحاب رأسي وأفقي)

$$\text{Max} = |a| + d = 25 + 30 = 55$$

$$\text{Min} = -|a| + d = -25 + 30 = 5$$

أقصى ارتفاع 55 قدما , أدنى ارتفاع 5 أقدام

نضرب الاحداثي y في 25 ثم نضيف 30 أما الاحداثي x نضرب في $\frac{15}{\pi}$ ثم نضيف 7.5



النقاط المفتاحية	التعديل
(0, 0)	(7.5, 30)
($\frac{\pi}{2}$, 1)	(15, 55)
(π , 0)	(22.5, 30)
($\frac{3\pi}{2}$, -1)	(30, 5)
(2π , 0)	(37.5, 30)

مهارات التفكير العليا

أميز الجملة الصحيحة من الجملة غير الصحيحة في ما يأتي , وأبرر اجابتي :

(19) كل اقتران جيب في صورة $y = a_1 \sin(b_1x - c_1) + d_1$ يكتب بوصفه اقتران جيب تمام في صورة $y = a_2 \cos(b_2x - c_2) + d_2$

الحل :-

صحيح , لأنه يمكن الحصول على منحنى اقتران الجيب بعمل **ازاحة أفقية** الى اليمين لمنحنى اقتران جيب التمام **مقدارها** $\frac{\pi}{2}$ **والعكس صحيح** .

(20) طول دورة الاقتران $f(x) = \cos 8x$ يساوي **أربعة أضعاف** طول دورة الاقتران $g(x) = \cos 2x$

الحل :-

غير صحيحة , لأن طول دورة $f(x)$ هي : $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ وطول دورة $g(x)$ هي $\frac{2\pi}{2} = \pi$

الصواب هو طول دورة $g(x)$ هو أربعة أضعاف طول دورة $f(x)$

(21) تحد :- أملأ الفراغ بما هو مناسب في ما يأتي لتصبح العبارة صحيحة :-

$$\cos(-2x + 6\pi) = \sin 2(x + \boxed{})$$

الحل :-

$$\text{نعلم أن } \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ (المتمة)}$$

وعليه :-

$$\begin{aligned}\cos(-2x + 6\pi) &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-2x + 6\pi)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - 6\pi\right) \\ &= \sin\left(2x - \frac{11\pi}{2}\right) \\ &= \sin 2\left(x - \frac{11\pi}{4}\right) = \sin 2\left(x + \frac{5\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

كتاب التمارين

أجد طول الدورة والسعة (ان وجدت) لكل اقتران مما يأتي , ثم أمثله بيانياً.

1) $g(x) = 2 + \sin x$

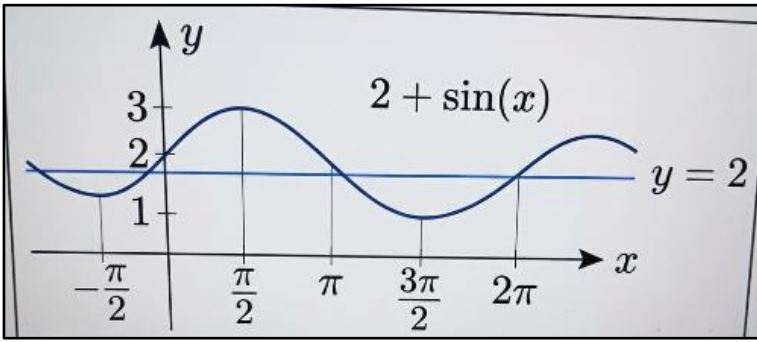
(ازاحة رأسية)

الحل :-

$$a = 1, b = 1, c = 0, d = 2$$

السعة : $|a| = |1| = 1$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

نلاحظ يوجد فقط ازاحة رأسية الى أعلى بمقدار 2 , وعليه نضيف 2 للإحداثي y



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0, 0 + 2) = (0, 2)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2}, 1 + 2) = (\frac{\pi}{2}, 3)$
$(\pi, 0)$	$(\pi, 0 + 2) = (\pi, 2)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2}, -1 + 2) = (\frac{3\pi}{2}, 1)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi, 0 + 2) = (2\pi, 2)$

2) $g(x) = 5 - \cos x$

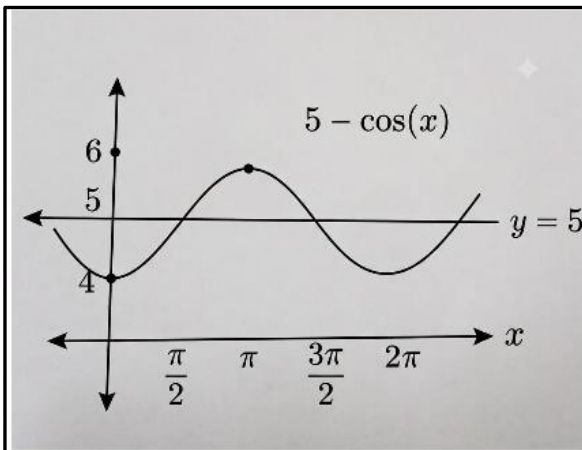
(ازاحة رأسية وانعكاس)

الحل :-

$$a = -1, b = 1, c = 0, d = 5$$

السعة : $|a| = |-1| = 1$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

نلاحظ وجود انعكاس لان معامل a سالب , هنا نغير اشارة y ثم نضيف 5 لوجود ازاحة رأسية لأعلى



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 1)$	$(0, -1 + 5) = (0, 4)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2}, 0 + 5) = (\frac{\pi}{2}, 5)$
$(\pi, -1)$	$(\pi, 1 + 5) = (\pi, 6)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2}, 0 + 5) = (\frac{3\pi}{2}, 5)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi, -1 + 5) = (2\pi, 4)$

3) $g(x) = -\cos(x + \pi)$

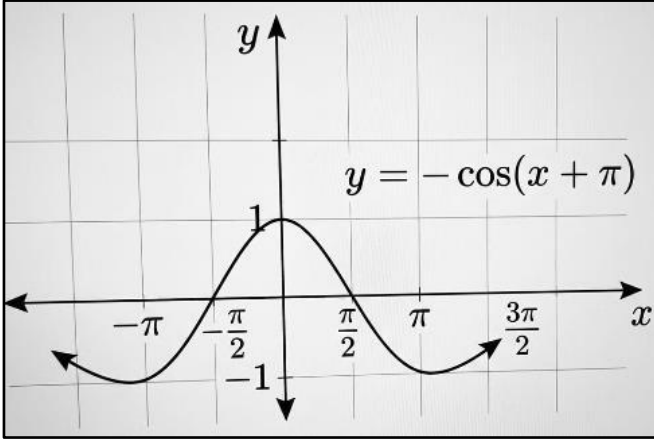
(ازاحة أفقية وانعكاس)

الحل :-

$a = -1$, $b = 1$, $c = -\pi$, $d = 0$

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$: السعة : $|a| = |-1| = 1$, طول الدورة :

نلاحظ وجود انعكاس هنا نغير إشارة y ثم نطرح π من x لوجود ازاحة أفقية بمقدار π



النقاط المفتاحية	التعديل
(0, 1)	$(0 - \pi, -1) = (-\pi, -1)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} - \pi, 0) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi - \pi, 1) = (0, 1)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} - \pi, 0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi - \pi, -1) = (\pi, -1)$

4) $g(x) = 5 - \cos(x - \frac{\pi}{2})$

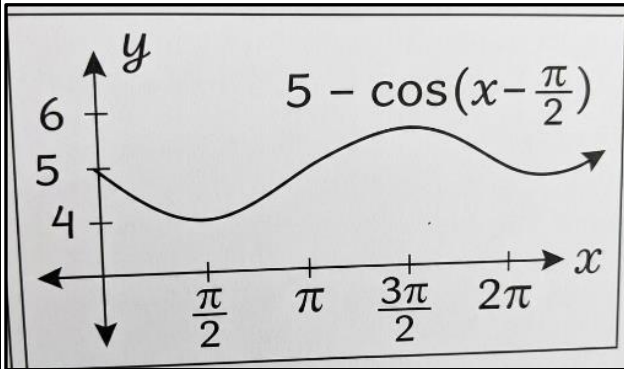
(ازاحة أفقية ورأسية وانعكاس)

الحل :-

$a = -1$, $b = 1$, $c = \frac{\pi}{2}$, $d = 5$

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$: السعة : $|a| = |-1| = 1$, طول الدورة :

نلاحظ وجود انعكاس هنا نغير إشارة y ثم نضيف لها 5 لوجود ازاحة رأسية ونضيف $\frac{\pi}{2}$ للاحداثي x



النقاط المفتاحية	التعديل
(0, 1)	$(0 + \frac{\pi}{2}, -1 + 5) = (\frac{\pi}{2}, 4)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, 0 + 5) = (\pi, 5)$
$(\pi, -1)$	$(\pi + \frac{\pi}{2}, 1 + 5) = (\frac{3\pi}{2}, 6)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, 0 + 5) = (2\pi, 5)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi + \frac{\pi}{2}, -1 + 5) = (\frac{5\pi}{2}, 4)$

5) $g(x) = -2 - \sin(x - \pi)$

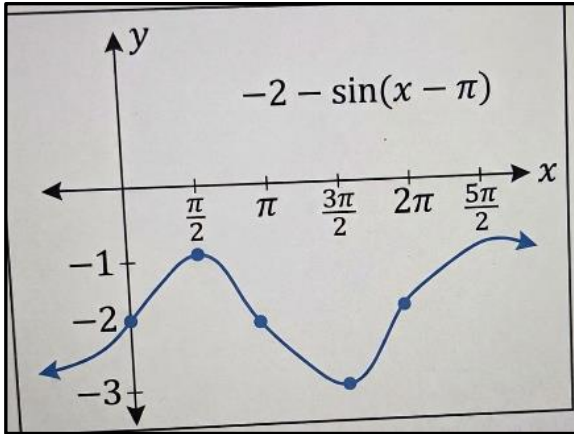
(ازاحة أفقية ورأسية وانعكاس)

الحل :-

$a = -1$, $b = 1$, $c = \pi$, $d = -2$

$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$: السعة : $|a| = |-1| = 1$, طول الدورة :

نلاحظ وجود انعكاس هنا نغير إشارة y ثم نطرح 2 لوجود ازاحة رأسية لأسفل ونضيف π للاحداثي x



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 + \pi, 0 - 2) = (\pi, -2)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} + \pi, -1 - 2) = (\frac{3\pi}{2}, -3)$
$(\pi, 0)$	$(\pi + \pi, 0 - 2) = (2\pi, -2)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} + \pi, 1 - 2) = (\frac{5\pi}{2}, -1)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi + \pi, 0 - 2) = (3\pi, -2)$

6) $g(x) = -4 \sin \frac{1}{4}x$

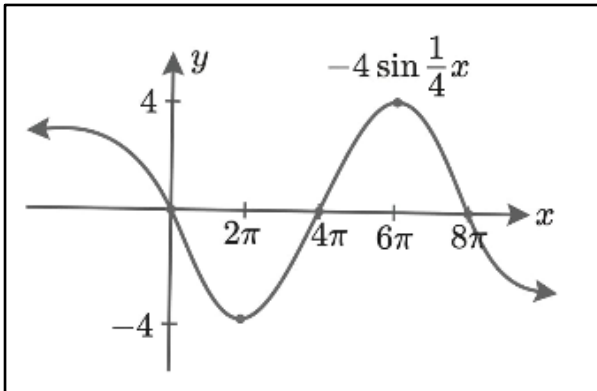
(انعكاس وتمدد رأسي وتمدد أفقي)

الحل :-

$a = -4$, $b = \frac{1}{4}$, $c = 0$, $d = 0$

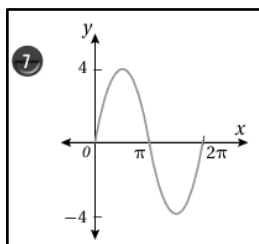
$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$: السعة : $|a| = |-4| = 4$, طول الدورة :

التمدد الأفقي نضرب x بـ $\frac{1}{b}$ وهو 4 ونغير إشارة y ونضربها في 4 بسبب التمدد الرأسي



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 \times 4, 0 \times 4) = (0, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} \times 4, -1 \times 4) = (2\pi, -4)$
$(\pi, 0)$	$(\pi \times 4, 0 \times 4) = (4\pi, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} \times 4, 1 \times 4) = (6\pi, 4)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi \times 4, 0 \times 4) = (8\pi, 0)$

أجد السعة وطول الدورة لكل اقتران مما يأتي , ثم أكتب معادلة في صورة :-



$$y = a \sin b(x - c) \quad , \quad y = a \cos b(x - c)$$

ملاحظة

من الرسم , فان طول الدورة هو المسافة الافقية بين قمتين أو قاعين

أو المسافة بين كل تقاطعين متتاليين يمثل نصف دورة , وعليه نضرب بالعدد (2) لمعرفة طول الدورة .

أما السعة فهي المسافة الرأسية بين القمة والقاع مقسوم على 2 أو المسافة بين خط الوسط والقمة أو القاع .

الحل :-

السعة :- $\frac{4 - (-4)}{2} = 4$ وهي تمثل a أو مباشرة 4 لأن خط الوسط $y = 0$

طول الدورة : $2(\pi - 0) = 2\pi$, حسب قانون الدورة هنا قيمة b هي 1

نلاحظ لا يوجد ازاحة لرسمه اقتران الجيب وعليه $c = 0$

$$y = 4 \sin x$$

الحل :-

السعة :- $\frac{2 - (-2)}{2} = 2$ وهي تمثل a أو مباشرة 2 لأن خط الوسط $y = 0$

طول الدورة : $2\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\pi$, حسب قانون الدورة هنا قيمة b هي 1

نلاحظ لا يوجد ازاحة لرسمه اقتران جيب التمام وعليه $c = 0$

$$y = 2 \cos x$$

الحل :-

السعة :- $\frac{\frac{1}{10} - (-\frac{1}{10})}{2} = \frac{1}{10}$ مباشرة $\frac{1}{10}$ لأن خط الوسط $y = 0$

طول الدورة : $2\left(0 - \frac{-\pi}{2}\right) = \pi$, حسب قانون الدورة هنا قيمة b هي 2

نلاحظ أن الرسمه عبارة عن معكوس رسمه جيب التمام مزاح لليساو $\frac{\pi}{2}$ رسمه الجيب مزاح لليساو $\frac{\pi}{2}$

$$y = \frac{-1}{10} \sin 2x \quad \text{أو} \quad y = \frac{-1}{10} \cos 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

يمكن تمثيل الارتفاع بالأقدام لأرجوحة فوق سطح الأرض بالاقتران :- $h = -8\cos \theta + 10$

حيث يرتفع مرتبط الأرجوحة 10 أقدام فوق سطح الأرض. ويبلغ طول حبل الأرجوحة 8 أقدام

وتمثل θ الزاوية التي يصنعها الحبل مع المحور الرأسي.

(10) أجد ارتفاع الأرجوحة عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$

(11) أمثل الاقتران h بيانيا .

الحل :-

(10) عوض : $h = -8 \cos \frac{\pi}{4} + 10$

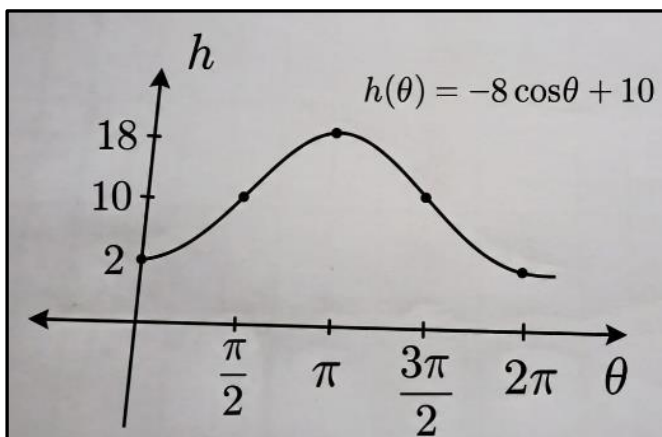
$$h = (-8)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 10 = \frac{-8}{\sqrt{2}} + 10 = \frac{10\sqrt{2}-8}{\sqrt{2}}$$

$$ft \approx 4.34$$

(11) الحل :- (انعكاس وتمدد رأسي وإزاحة رأسية)

$$a = -8 , b = 1 , c = 0 , d = 10$$

ونغير إشارة y ونضربها في 8 ونضيف 10



النقاط المفتاحية	التعديل
(0 , 1)	(0 , -1 × 8 + 10) = (0 , 2)
($\frac{\pi}{2}$, 0)	($\frac{\pi}{2}$, 0 + 10) = ($\frac{\pi}{2}$, 10)
(π , -1)	(π , 1 × 8 + 10) = (π , 18)
($\frac{3\pi}{2}$, 0)	($\frac{3\pi}{2}$, 0 + 10) = ($\frac{3\pi}{2}$, 10)
(2π , 1)	(2π , -1 × 8 + 10) = (2π , 2)

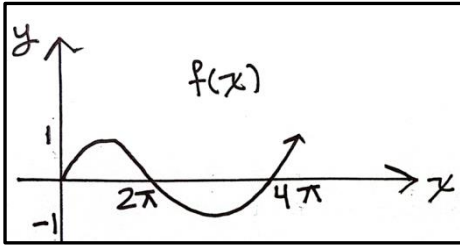
ورقة عمل (3)

1) إذا كان $f(x) = -5\cos x$ فإن **السعة** تساوي :-

- a) -5 b) 5 c) 10 d) 1

2) إذا كان $f(x) = 4\cos(\frac{x}{5})$ فإن **طول الدورة** :-

- a) 20π b) 2π c) 10π d) 8π



3) **قاعدة الاقتران** التي تمثل المنحنى المجاور

- a) $f(x) = \sin 2x$ b) $f(x) = 2\sin 2x$
c) $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ d) $f(x) = -\sin \frac{x}{2}$

4) إذا كان $f(x) = 9\cos x - 7$ فإن **معادلة خط الوسط** للاقتران $f(x)$

- a) $y = 7$ b) $y = 9$ c) $x = -7$ d) $y = -7$

5) إذا كان $f(x) = 2\cos 7x + 5$ فإن **مدى الاقتران** $f(x)$

- a) $[3, 7]$ b) $[-2, 2]$ c) $[5, 7]$ d) $[-7, 7]$

6) **مجال** الاقتران $f(x) = 9\sin 5x + 8$

- a) $[8, 9]$ b) $[-2\pi, 2\pi]$ c) $[0, 2\pi]$ d) $\mathbb{R}$

إذا كان $f(x)$ اقتران جيبي مداه $[-2, 8]$ أجب عن الفقرتين :-

7) **معادلة خط الوسط** للاقتران $f(x)$

- a) $y = 2$ b) $y = 3$ c) $y = 4$ d) $y = 5$

8) **سعة** الاقتران $f(x)$

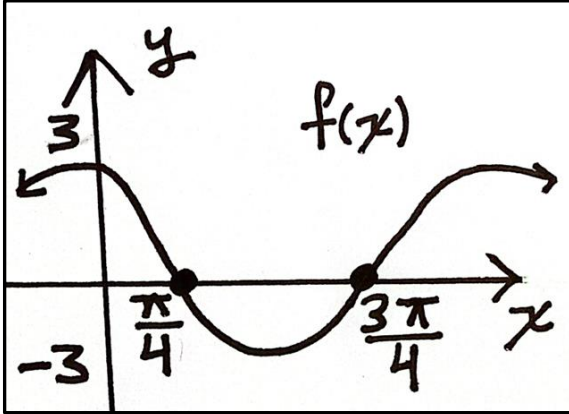
- a) -5 b) 5 c) 10 d) 1

9) إذا كان $f(x)$ اقتران جيبي **سعته** 4 و**معادلة خط الوسط** $y = 1$ فإن **مدى الاقتران** $f(x)$

- a) $[-3, 5]$ b) $[-4, 4]$ c) $[1, 5]$ d) $[-5, 3]$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	الفقرة
b	c	c	d	a	d	b	b	a	الاجابة

معتما الشكل المجاور والذي يمثل جزء من التمثيل البياني لاقتران جيبى , أجب عن الفقرتين :



(10) سعة الاقتران $f(x)$

- a) 3
b) 6
c) 1
d) 9

(11) دورة الاقتران $f(x)$

- a) 2π
b) π
c) 3π
d) $\frac{\pi}{2}$

(12) اذا كان طول دورة الاقتران $f(x) = \sin kx$ يساوي π , فان قيمة الثابت k حيث $k > 0$

- a) 1
b) 2
c) $\frac{1}{2}$
d) 4

(13) اذا كان $f(x) = a \sin x$ حيث $a > 0$ وكان مدى الاقتران $[-6, 6]$ فان قيمة الثابت a

- a) 3
b) 12
c) 6
d) 2

(14) التحويل الهندسي التي طبق على $f(x) = 3\sin x$ لينتج $g(x) = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$

- (a) ازاحة لليساو $\frac{\pi}{3}$ وللأسفل 2
(b) ازاحة لليمين $\frac{\pi}{3}$ وللأعلى 2
(c) تمدد رأسي بمعامل 2
(d) انعكاس حول المحور x

(15) التحويل الهندسي التي طبق على $f(x) = \sin 2x$ لينتج $g(x) = \sin(2x - \pi)$

- (a) ازاحة لليساو π
(b) ازاحة لليمين $\frac{\pi}{2}$
(c) تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$
(d) انعكاس حول المحور x

(16) اذا كان $f(x) = 3\cos\left(2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 9$ فان طول الدورة :-

- a) $\frac{\pi}{4}$
b) 3π
c) 2π
d) π

(17) اذا كان $y = 5\sin(4x + \pi) - 2$, أي العبارات الآتية صحيحة :-

- (a) السعة 2 والدورة $\frac{\pi}{4}$ والمدى $[-3, 7]$
(b) السعة 5 والدورة $\frac{\pi}{2}$ والمدى $[-7, 3]$
(c) السعة 4 والدورة π والمدى $[-5, 5]$
(d) السعة 5 والدورة $\frac{\pi}{2}$ والمدى $[-5, 5]$

الفقرة	10	11	12	13	14	15	16	17
الاجابة	a	b	b	c	b	b	d	b

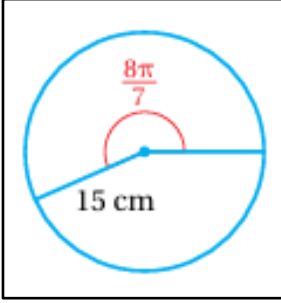
اختبار نهاية الوحدة

(1) إذا كان $\cot \theta = 1$ فإن $\tan \theta$ تساوي :-

- a) -1 b) 1 c) 0 d) 3

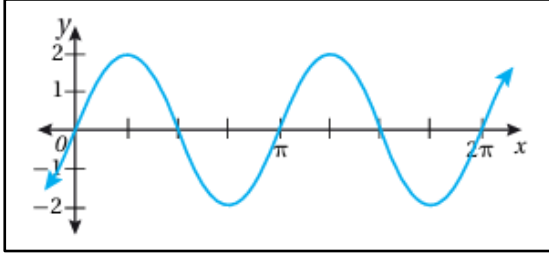
(2) قياس الراديان الذي يساوي 56^0 هو :

- a) $\frac{\pi}{15}$ b) $\frac{14\pi}{45}$ c) $\frac{7\pi}{45}$ d) $\frac{\pi}{3}$



(3) طول القوس المقابل للزاوية $\frac{8\pi}{7}$ في الدائرة المجاورة مقربا الى أقرب جزء من عشرة هو :

- a) 4.2 cm b) 17.1 cm
c) 53.9 cm d) 2638.9 cm



(4) قاعدة الاقتران التي تمثل المنحنى الاتي هي :

- a) $y = \frac{1}{2} \sin 4x$ b) $y = \frac{1}{4} \sin 2x$
c) $y = 2 \sin 2x$ d) $y = 4 \sin \frac{1}{2}x$

(5) النقطة التي يوجد عندها قيمة عظمى للاقتران $y = -4 \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$ هي :

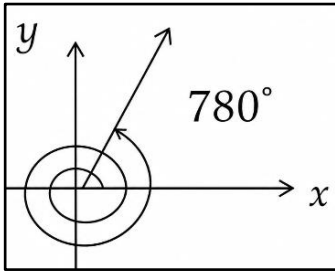
- a) $\left(-\frac{\pi}{2}, 4 \right)$ b) $\left(\frac{\pi}{2}, 4 \right)$ c) $(0, 4)$ d) $(\pi, 4)$

1	2	3	4	5	الفقرة
b	b	c	c	a	الاجابة

أرسم في **الوضع القياسي** الزاوية التي علم قياسها في كل مما يأتي :-

الحل :-

6) 780°



الدورة كاملة 360° , لكن 780° أكبر من 360°

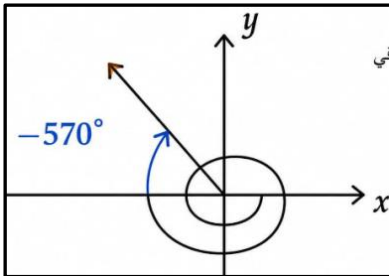
في هذه الحالة نطرح منها مضاعفات الـ 360° لمعرفة أين يقع ضلع الانتهاء .

$$780^\circ - (2) 360^\circ = 60^\circ$$

وهذه تقع في الربع الأول

ملاحظة :- نكمل دورتين ثم نرسم 60°

7) -570°



الحل :-

هنا الدوران مع عقارب الساعة لانه الزاوية سالبة

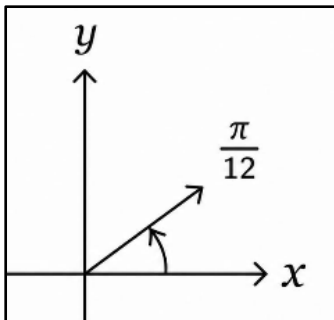
لمعرفة ضلع انتهائها نجمع لها مضاعفات 360°

$$-570^\circ = -570^\circ + (360^\circ) = -210^\circ$$

وهذه تقع في الربع الثاني .

ملاحظة :- نكمل دورة كاملة ثم نرسم -210°

8) $\frac{\pi}{12}$

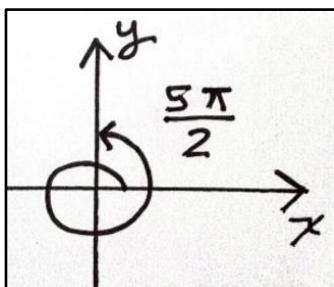


الحل :-

ملاحظة :- لسهولة الرسم عند اعطاء قياس بالراديان حول للدرجات

$$\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 15^\circ \quad (\text{الربع الأول})$$

9) $\frac{5\pi}{2}$



الحل :-

$$\frac{5\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 450^\circ$$

$$450^\circ - 360^\circ = 90^\circ \quad (\text{محور } y \text{ الموجب})$$

أحول قياس الزاوية المكتوب بالدرجات الى الراديان , وقياس الزاوية المكتوب بالراديان الى الدرجات في كل مما يأتي :-

10) -720°

الحل :-

$$-720^{\circ} = (-720^{\circ}) \times \left(\frac{\pi}{180^{\circ}} \right) = -4\pi$$

11) 315°

الحل :-

$$315^{\circ} = (315^{\circ}) \times \left(\frac{\pi}{180^{\circ}} \right) = \frac{7\pi}{4}$$

12) $\frac{13\pi}{8}$

الحل :-

$$\frac{13\pi}{8} = \left(\frac{13\pi}{8} \right) \times \left(\frac{180^{\circ}}{\pi} \right) = \left(\frac{585}{2} \right)^{\circ}$$

13) 3.5π

الحل :-

$$3.5\pi = (3.5\pi) \times \left(\frac{180^{\circ}}{\pi} \right) = 630^{\circ}$$

أجد زاويتين احدهما قياسهما موجب والأخرى قياسها سالب , وكلتاهما مشتركة في ضلع الانتهاء مع كل زاوية معطاه مما يأتي , ثم أرسمهما :-

14) -115°

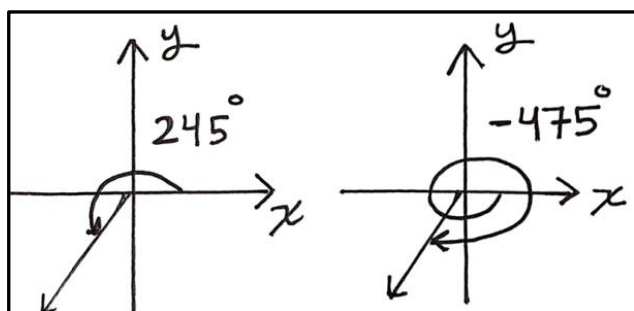
الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^{\circ}n$ ونستبدل مكان n

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 1$:

$$-115^{\circ} + 360^{\circ}(1) = 245^{\circ}$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$:

$$-115^{\circ} + 360^{\circ}(-1) = -475^{\circ}$$



15) 780°

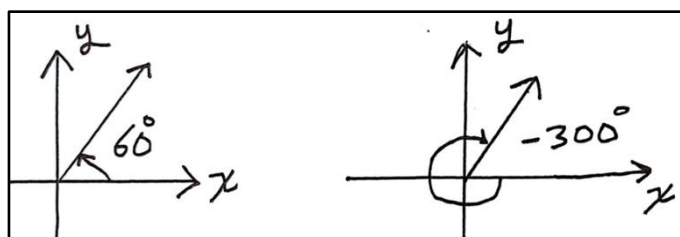
الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 360^{\circ}n$ ونستبدل مكان n

لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 2$:

$$780^{\circ} - 360^{\circ}(2) = 60^{\circ}$$

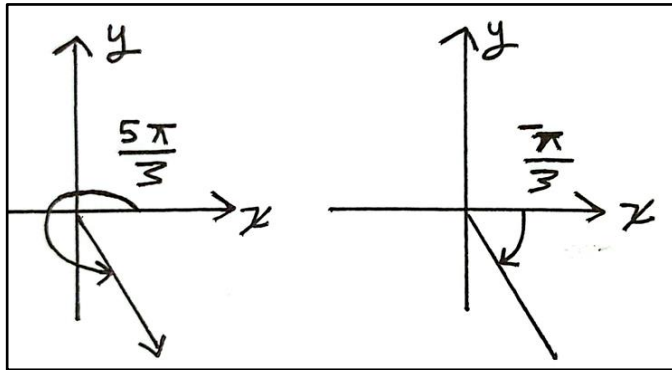
لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -3$:

$$780^{\circ} + 360^{\circ}(-3) = -300^{\circ}$$



16) $\frac{-7\pi}{3}$

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة



لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 2$:-

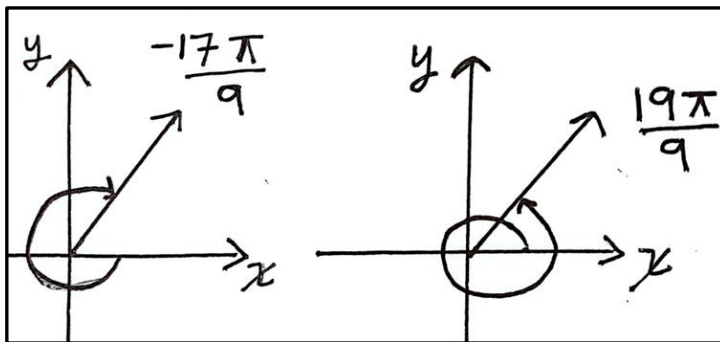
$$\frac{-7\pi}{3} + 2(2)(\pi) = \frac{5\pi}{3}$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = 1$:-

$$\frac{-7\pi}{3} + 2(1)(\pi) = \frac{-\pi}{3}$$

17) $\frac{\pi}{9}$

الحل :- نكتب العلاقة $\theta + 2n\pi$ ونستبدل مكان n على عدد الزوايا المطلوبة



لايجاد زاوية مشتركة موجبة عوض $n = 2$:-

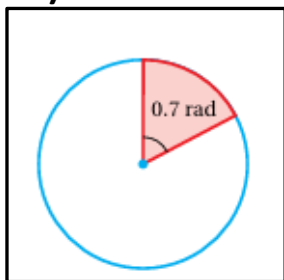
$$\frac{\pi}{9} + 2(1)(\pi) = \frac{19\pi}{9}$$

لايجاد زاوية مشتركة سالبة عوض $n = -1$:-

$$\frac{\pi}{9} + 2(-1)(\pi) = \frac{-17\pi}{9}$$

أجد نصف قطر كل قطاع مما يأتي , علما بأن مساحة القطاع 12 وحدة مربعة

18)



الحل :-

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

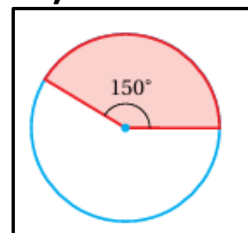
$$12 = \frac{1}{2} r^2 (0.7)$$

نضرب طرفي المعادلة في (2)
ثم نقسم على (0.7)

$$r^2 = \frac{24}{0.7}$$

$$r = \sqrt{\frac{24}{0.7}} \approx 5.86$$

19)



الحل :-

نحول الزاوية من درجات الى راديان

$$\frac{5\pi}{6}$$

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

$$12 = \frac{1}{2} r^2 \left(\frac{5\pi}{6} \right)$$

نضرب طرفي المعادلة في $\left(\frac{12}{5\pi} \right)$

$$r^2 = (12) \left(\frac{12}{5\pi} \right) \rightarrow r = \sqrt{\frac{144}{5\pi}} \approx 3.03$$

أجد قيمة كل مما يأتي :-

20) $\sec 300^\circ$

الحل :-

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الرابع
نجد زاويتها المرجعية :-

$$360^\circ - 300^\circ = 60^\circ$$

القاطع موجب في الربع الرابع

$$2\sec 300^\circ = \sec 60^\circ = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}} =$$

21) $\tan 240^\circ$

الحل :-

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثالث
نجد زاويتها المرجعية :-

$$240^\circ - 180^\circ = 60^\circ$$

الظل موجب في الربع الثالث

$$\tan 240^\circ = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

22) $\cos \frac{14\pi}{3}$

الحل :- الزاوية $\frac{14\pi}{3}$ أكبر من 2π

هنا نجد أولاً الزاوية المشتركة مع الزاوية $\frac{14\pi}{3}$

والتي قياسها موجب و أقل من 2π

$$\frac{14\pi}{3} + (-2)(2\pi) = \frac{2\pi}{3}$$

الزاوية ضلع انتهائها يقع في الربع الثاني

نجد زاويتها المرجعية :-

$$\pi - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

جيب التمام سالب في الربع الثاني :-

$$\cos \frac{14\pi}{3} = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

23) $\sec (-3\pi)$

الحل :-

بما ان الزاوية سالبة , نجد أولاً الزاوية
المشتركة مع الزاوية -3π والتي قياسها موجب
وأقل من 2π

$$-3\pi + (2)(2\pi) = \pi$$

الزاوية ربعية , وعليه :-

$$\sec \pi = \frac{1}{\cos \pi} = \frac{1}{-1} = -1$$

أجد قيمة كل من الاقترانات المثلثية الخمسة المتبقية للزاوية θ في كل مما يأتي :-

24) $\cos \theta = \frac{3}{5}$, $\tan \theta < 0$

الحل :- بما أن $\cos \theta$ موجب و $\tan \theta$ سالب فان الزاوية θ تقع في الربع الرابع , هنا اشارة x موجب و اشارة y سالب

بما أن :- $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5}$, هنا $x = 3$, $r = 5$

نجد y من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 25 = 9 + y^2 \rightarrow y^2 = 16 \rightarrow y = -4$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5} , \csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{-5}{4}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{3} , \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-4}{3} , \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{-3}{4}$$

25) $\sec \theta = 2, \sin \theta < 0$

الحل :- بما أن $\sec \theta$ موجب و $\sin \theta$ سالب فإن الزاوية θ تقع في الربع الرابع , هنا إشارة x موجبة وإشارة y سالبة

بما أن :- $r = 2, x = 1, \sec \theta = \frac{r}{x} = \frac{2}{1}$

نجد y من نظرية فيثاغورس :-

$$r^2 = x^2 + y^2 \rightarrow 4 = 1 + y^2 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3} \rightarrow y = -\sqrt{3}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$$

$$\csc \theta = \frac{r}{y} = \frac{2}{-\sqrt{3}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

أجد طول الدورة والسعة لكل اقتران مما يأتي , ثم أمثله بيانياً.

26) $g(x) = 3 \cos \pi(x + \frac{1}{2})$

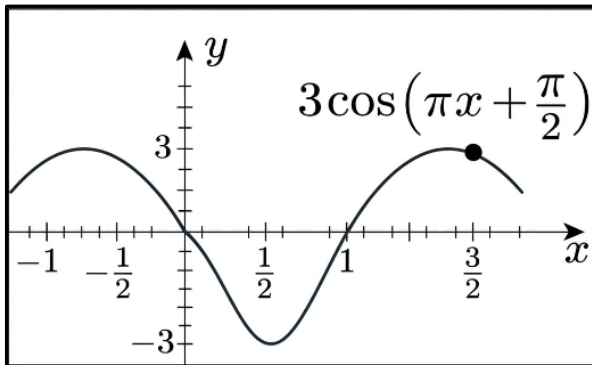
(تمدد رأسي وأفقي وإزاحة أفقية)

الحل :-

$$a = 3, \quad b = \pi, \quad c = \frac{-\pi}{2}, \quad d = 0$$

السعة : $|a| = |3| = 3$, طول الدورة : $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

نضرب الاحداثي y بالعدد 3 لوجود توسيع رأسي ثم نضرب الاحداثي x بالعدد $\frac{1}{\pi}$ ونطرح $\frac{1}{2}$



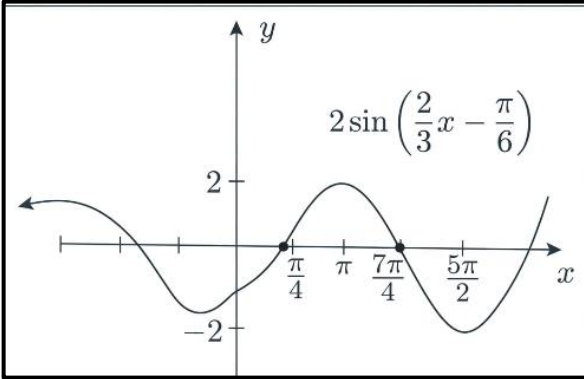
النقاط المفتاحية	التعديل
(0, 1)	$(0 \times \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}, 1 \times 3) = (-\frac{1}{2}, 3)$
$(\frac{\pi}{2}, 0)$	$(\frac{\pi}{2} \times \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}, 0 \times 3) = (0, 0)$
$(\pi, -1)$	$(\pi \times \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}, -1 \times 3) = (\frac{1}{2}, -3)$
$(\frac{3\pi}{2}, 0)$	$(\frac{3\pi}{2} \times \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}, 0 \times 3) = (1, 0)$
$(2\pi, 1)$	$(2\pi \times \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2}, 1 \times 3) = (\frac{3}{2}, 3)$

$$27) g(x) = 2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$a = 2, b = \frac{2}{3}, c = \frac{\pi}{6}, d = 0 \quad \text{الحل :-}$$

$$y = 0 \text{ معادلة خط الوسط } , \quad \frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi \quad \text{طول الدورة : } |a| = |2| = 2 \quad \text{السعة : } 2$$

نضرب الاحداثي y في 2 ثم نصرب الاحداثي x بالعدد $\frac{3}{2}$ ثم نضيف $\frac{\pi}{4}$



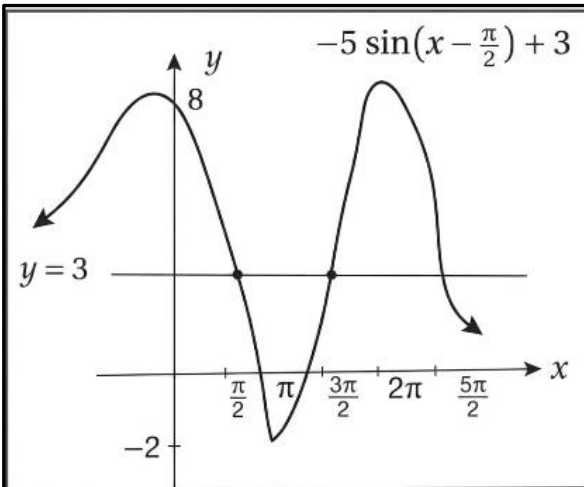
النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 \times \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}, 0 \times 2) = (\frac{\pi}{4}, 0)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}, 1 \times 2) = (\pi, 2)$
$(\pi, 0)$	$(\pi \times \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}, 0 \times 2) = (\frac{7\pi}{4}, 0)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}, -1 \times 2) = (\frac{5\pi}{2}, -2)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi \times \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4}, 0 \times 2) = (\frac{13\pi}{4}, 0)$

$$28) g(x) = -5\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$$

$$a = -5, b = 1, c = \frac{\pi}{2}, d = 3 \quad \text{الحل :-}$$

$$y = 3 \text{ معادلة خط الوسط } , \quad \frac{2\pi}{|b|} = 2\pi \quad \text{طول الدورة : } |a| = |-5| = 5 \quad \text{السعة : } 5$$

نضرب الاحداثي y في -5 ثم نضيف 3 أما الاحداثي x فنزيد له $\frac{\pi}{2}$



النقاط المفتاحية	التعديل
$(0, 0)$	$(0 + \frac{\pi}{2}, 0 + 3) = (\frac{\pi}{2}, 3)$
$(\frac{\pi}{2}, 1)$	$(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, -5 + 3) = (\pi, -2)$
$(\pi, 0)$	$(\pi + \frac{\pi}{2}, 0 + 3) = (\frac{3\pi}{2}, 3)$
$(\frac{3\pi}{2}, -1)$	$(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2}, 5 + 3) = (2\pi, 8)$
$(2\pi, 0)$	$(2\pi + \frac{\pi}{2}, 0 + 3) = (\frac{5\pi}{2}, 3)$

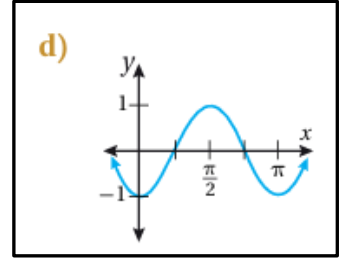
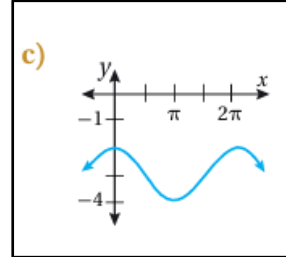
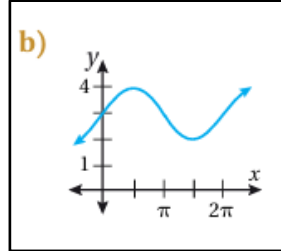
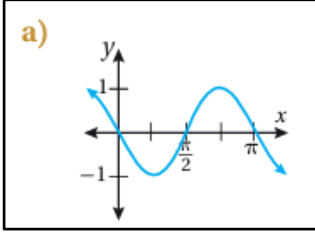
أكتب بجانب كل اقتران مما يأتي رمز التمثيل المناسب له من بين التمثيلات البيانية (a – d)

29) $g(x) = 3 + \sin x$

30) $g(x) = -3 + \cos x$

31) $g(x) = \sin 2(x - \frac{\pi}{2})$

32) $g(x) = \cos 2(x - \frac{\pi}{2})$



الحل :-

نستفيد من السعة والانسحاب وخط الوسط

29)b

30)c

31) a

32) d